ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

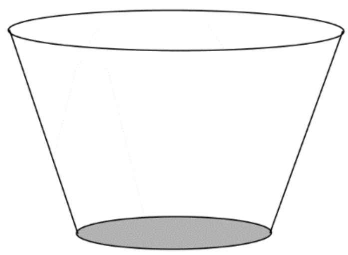
Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Παρασκευή, 27 Μαΐου 2016**
8:00 π.μ. – 11:00 π.μ.

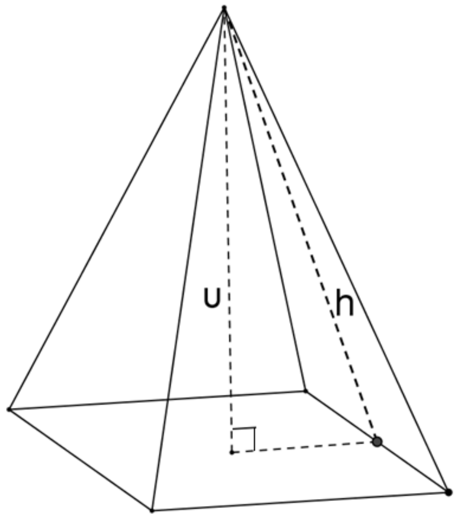
ΛΥΣΕΙΣ
ΜΕΡΟΣ Α

<table>
<tr><td>1.</td><td>Οι εβδομαδιαίοι μισθοί σε ευρώ των πέντε υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι: €150, €180, €200, €140, €210. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των εβδομαδιαίων μισθών των υπαλλήλων
<u>Λύση</u>
$$\bar{x} = \frac{150+180+200+140+210}{5}$$
$$\bar{x} = 176$$
Η μέση τιμή των εβδομαδιαίων μισθών των υπαλλήλων είναι €176</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Ορθό πρίσμα με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν βάσης $E_\beta = 20cm^2$ και ύψος $\upsilon = 5cm$. Να υπολογίσετε τον όγκο του πρίσματος.
<u>Λύση</u>
$$V = E_\beta . \upsilon$$
$$V = 20 \cdot 5 = 100cm^3$$</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Κεφάλαιο €6000 τοκίζεται με απλό τόκο προς 1,25% για 3 χρόνια. Να υπολογίσετε τον τόκο που θα αποδώσει.
Λύση
$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100}$$
$$T = \frac{6000 \cdot 1{,}25 \cdot 3}{100} = 225$$
Ο τόκος είναι €225</td><td></td></tr>
</table>

4.	Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κύβου είναι $E_{ολ} = 96cm^2$. Να υπολογίσετε: α) Την ακμή του κύβου. β) Τον όγκο του κύβου. <u>Λύση</u> $E_{ολ} = 6 \cdot α^2$ $96 = 6 \cdot α^2$ $α^2 = 16$ $α = 4cm$ $V = α^3 = 4^3 = 64cm^3$	
5.	Δίνεται η λέξη **Κ Α Ρ Α Β Ο Σ Τ Α Σ Ι** . Να βρείτε : α) Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης. β) Πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν και τελειώνουν με Σ. <u>Λύση</u> $α) \quad M_{11}^{ε} = \frac{11!}{3! \cdot 2!} = 3326400$ $β) \quad M_{9}^{ε} = \frac{9!}{3!} = 60480$	
6.	Το διπλανό κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τις αθλητικές δραστηριότητες 1440 ατόμων στον ελεύθερό τους χρόνο. Ο αριθμός των ατόμων που ασχολούνται με την ποδηλασία είναι ίσος με τον αριθμό των ατόμων που ασχολούνται με το κολύμπι.  Να βρείτε: α) Το ποσοστό των ατόμων που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο. β) Τον αριθμό των ατόμων που ασχολούνται με την ποδηλασία. <u>Λύση</u> $α) \quad \frac{120}{360} \cdot 100\% = 33{,}3\%$ $β) \; x + x + 120^{\circ} + 90^{\circ} = 360^{\circ} \Leftrightarrow 2x + 210^{\circ} = 360^{\circ} \Leftrightarrow x = 75^{\circ}$ $\frac{75}{360} \cdot 1440 = 300$	

	Ασχολούνται με την ποδηλασία 300 άτομα	
7.	Ο κύριος Γεωργίου είχε μηνιαίο μισθό €1800 και αποταμίευε το 15% του μισθού του. Λόγω της οικονομικής κρίσης ο μισθός του μειώθηκε κατά 20%. Ο κύριος Γεωργίου αποφάσισε αντί να αποταμιεύει το 15% του νέου (μειωμένου) μισθού του, να το δίνει στην επιτροπή πρόνοιας του σχολείου της περιφέρειάς του. Να βρείτε: α) Πόσα χρήματα αποταμίευε μηνιαίως πριν από την μείωση του μισθού του. β) Πόσα χρήματα του απομένουν κάθε μήνα μετά τη μηνιαία εισφορά στην επιτροπή πρόνοιας του σχολείου της περιφέρειάς του. Λύση $\alpha)\quad \frac{15}{100}\cdot €1800 = €270$ Αποταμίευε μηνιαίως πριν από την μείωση του μισθού του €270 $\beta)\quad \frac{80}{100}\cdot €1800 = €1440$ $\frac{85}{100}\cdot €1440 = €1224$ Απομένουν κάθε μήνα μετά τη μηνιαία εισφορά €1224	
8.	Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα ποτήρι σχήματος κόλουρου κώνου ύψους $\upsilon = 10$ cm γεμάτο πλήρως με γάλα όγκου $V = \frac{1120\pi}{3}$ cm^3. Αν η ακτίνα της μιας βάσης του είναι διπλάσια από την ακτίνα της άλλης βάσης, να βρείτε το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας του ποτηριού. (Το πάχος του ποτηριού θεωρείται αμελητέο).  **Λύση:** $\mathrm{R} = 2\rho\ ,\ \upsilon = 10\ cm$ $V_{\kappa o\lambda\ \kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\cdot\rho + \rho^2)\ \Rightarrow \frac{1120\pi}{3} = \frac{\pi\cdot 10}{3}((2\rho)^2 + 2\rho\cdot\rho + \rho^2)$ $\Rightarrow 112 = 4\rho^2 + 2\rho^2 + \rho^2\ \Rightarrow\ 112 = 7\rho^2 \Rightarrow\ \rho^2 = 16 \Rightarrow\ \rho = 4cm$ $\lambda^2 = \upsilon^2 + (R-\rho)^2\ \Rightarrow\ \lambda^2 = 10^2 + 4^2 \Rightarrow \lambda^2 = 100 + 16 \Rightarrow \lambda^2 = 116$ $\Rightarrow \lambda = 2\sqrt{29}\,cm$ $E_{o\lambda} = E_\kappa + E_\beta\ \Rightarrow E_{o\lambda} = \pi(R+\rho)\lambda + \pi\rho^2 \Rightarrow E_{o\lambda} = \pi(8+4)\cdot\ 2\sqrt{29} +\ \pi 4^2$ $\Rightarrow E_{o\lambda} = 24\sqrt{29}\,\pi +\ 16\pi\ \Rightarrow E_{o\lambda} = 8\pi(3\sqrt{29}\ +\ 2)cm^2$	

9.	Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται: $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=4P(A')-2$ και $P(A\cup B)=\frac{11}{20}$ α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες: i. $P(A)$ ii. $P(A\cap B)$ iii. $P(A-B)$ β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα. **<u>Λύση:</u>** α) i) $P(A)=4P(A')-2 \Rightarrow P(A)=4\big(1-P(A)\big)-2 \Rightarrow$ $P(A)=4-4P(A)-2 \Rightarrow 5P(A)=2 \Rightarrow P(A)=\frac{2}{5}$ ii) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow \frac{11}{20}=\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-P(A\cap B)$ $P(A\cap B)=\frac{8}{20}+\frac{5}{20}-\frac{11}{20}=\frac{2}{20} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{10}$ iii) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ $\Rightarrow P(A-B)=\frac{2}{5}-\frac{1}{10} \Rightarrow P(A-B)=\frac{3}{10}$ β) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ασυμβίβαστα $\frac{11}{20} \neq \frac{13}{20}$ άρα τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα Β τρόπος $P(A\cap B)=\frac{1}{10}\neq 0$ άρα τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα	

10.	Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης $\alpha = 18$cm και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $E_\pi = 540\text{cm}^2$. Να υπολογίσετε: α) Το παράπλευρο ύψος ($\mathbf{h}$) της πυραμίδας. β) Τον όγκο ($\mathbf{V}$) της πυραμίδας. γ) Το μήκος της παράπλευρης ακμής της πυραμίδας.  **<u>Λύση:</u>** α) $E_\pi = \frac{\Pi_\beta \cdot h}{2} \Rightarrow 540 = \frac{4 \cdot 18\, h}{2} \Rightarrow$ $540 = 36h \Rightarrow h = 15cm$ β) $h^2 = \upsilon^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow 15^2 = \upsilon^2 + 9^2 \Rightarrow \upsilon^2 = 144 \Rightarrow \upsilon = 12cm$ $V = \frac{E_\beta . \upsilon}{3} = \frac{18^2 \cdot 12}{3} = \frac{324 \cdot 12}{3} \Rightarrow V = 1296\ cm^3$ γ) παράπλευρη ακμή = x : $x^2 = h^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 15^2 + 9^2 \Rightarrow x^2 = 306 \Rightarrow x = 3\sqrt{34}\ cm$	
	ΜΕΡΟΣ Β΄	
1.	Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των ωρών που μελέτησε μια ομάδα τελειόφοιτων μαθητών ενός Λυκείου το Σαββατοκύριακο.	

Ώρες (x_i)	0	1	2	3	4	5	6
Αριθμός μαθητών (f_i)	3	12	7	3	2	1	2

Να υπολογίσετε:

α) Την επικρατούσα τιμή (x_ε) των παρατηρήσεων.

β) Τη διάμεσο τιμή (x_δ) των παρατηρήσεων.

γ) Τη μέση τιμή ($\bar{x}$) των παρατηρήσεων.

δ) Την τυπική απόκλιση (σ) των παρατηρήσεων.

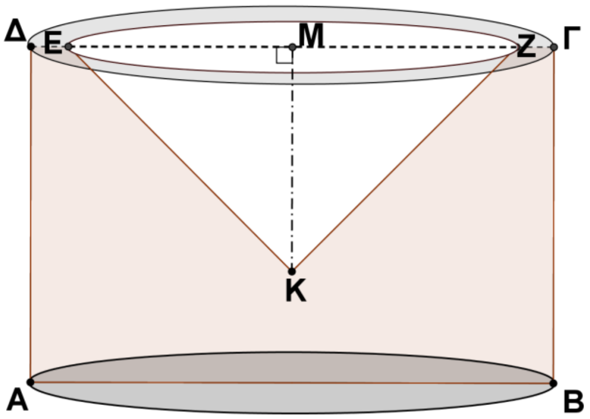
x	f_i	$f_i \cdot x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
0	3	0	4	12
1	12	12	1	12
2	7	14	0	0
3	3	9	1	3
4	2	8	4	8
5	1	5	9	9
6	2	12	16	32
	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 60$		$\Sigma f_i (\bar{x} - x_i)^2 = 76$

	(α) $x_\varepsilon = 1$ (β) $x_\delta = \frac{x_{15}+x_{16}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ (γ) $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{60}{30} = 2$ (δ) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i(\bar{x}-x_i)^2}{\Sigma f_i}} = \sqrt{\frac{76}{30}} = 1{,}59$	
2.	Μια εργοληπτική εταιρεία μείωσε τις τιμές πώλησης των διαμερισμάτων της κατά 25%. Κάποιος πελάτης της εταιρείας αγόρασε ένα διαμέρισμα και είχε όφελος από τη μείωση της τιμής του, €44800. Να βρείτε: α) Την τιμή πώλησης του διαμερίσματος πριν τη μείωση. β) Την τιμή αγοράς του διαμερίσματος από τον πελάτη. γ) Το κόστος του διαμερίσματος, αν στην τιμή αγοράς του διαμερίσματος από τον πελάτη περιλαμβάνεται και ποσοστό κέρδους 40% για την εταιρεία. Λύση: (α) $\frac{25}{100}x = 44800 \Rightarrow x = 179200$ (β) $179200 - 44800 = 134400$ (γ) $140\% \quad 134400 \qquad\qquad x = 96000$ $\quad 100\% \quad\quad x$	
3.	Σε ένα ευρωπαϊκό πρόγραμμα συμμετέχουν 4 μαθητές από τη Κύπρο, 3 μαθητές από το Βέλγιο και 2 μαθητές από την Ελλάδα. α) Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν οι πιο πάνω μαθητές να καθίσουν σε 9 αριθμημένα καθίσματα σε ευθεία γραμμή ώστε: i. Να μην υπάρχει κανένας περιορισμός . ii. Οι μαθητές από την Κύπρο να κάθονται όλοι μαζί στην αρχή. iii. Οι μαθητές από την Ελλάδα να μην κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο. β) Να βρείτε με πόσους τρόπους οι μαθητές μπορούν να καθίσουν σε κυκλικό τραπέζι έτσι ώστε οι μαθητές από το Βέλγιο να κάθονται σε συνεχόμενες θέσεις. Λύση: (α) i) $M_9 = 9! = 362880$ ii) $M_4 \cdot M_5 = 4! \cdot 5! = 2880$ iii) $9! - 8! \cdot 2! = 282240$ ή $\quad 7! \cdot 8 \cdot 7 = 282240$ (β) $3!\,(7-1)! = 3!\,6! = 4320$	

4.	Μέσα σε ένα ψυγείο παγωτών υπάρχουν 6 παγωτά με γεύση βανίλια, 4 παγωτά με γεύση σοκολάτα και 5 παγωτά με γεύση φράουλα. α) Αν πάρουμε στην τύχη ένα παγωτό να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου: Κ:«Το παγωτό έχει γεύση σοκολάτα». β) Αν πάρουμε στην τύχη δύο παγωτά, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: Λ: «Το ένα παγωτό έχει γεύση φράουλα και το άλλο έχει γεύση βανίλια» Μ: «Τα παγωτά έχουν την ίδια γεύση» γ) Αν πάρουμε στην τύχη τέσσερα παγωτά, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου: Ν: «Τα παγωτά έχουν όλες τις γεύσεις». Λύση: (α) $P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} = \frac{4}{15}$ (β) $P(\Lambda) = \frac{N(\Lambda)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}}{\binom{15}{2}} = \frac{30}{105} = \frac{2}{7}$ $P(M) = \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{6}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{31}{105}$ (γ) $P(N) = \frac{N(N)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{6}{2}\binom{5}{1}\binom{4}{1}+\binom{6}{1}\binom{5}{2}\binom{4}{1}+\binom{6}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{15}{4}} = \frac{300+240+180}{1365} = \frac{720}{1365} = \frac{48}{91}$	

5.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύλινδρος από τον οποίο έχει αφαιρεθεί ένας κώνος. Η διάμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι 14cm και το ύψος του κυλίνδρου είναι 9cm. Τα σημεία Ε και Ζ είναι σημεία της διαμέτρου ΓΔ τέτοια ώστε ΔΕ=ΓΖ=1cm. Το τρίγωνο ΕΚΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Το ΚΜ είναι το ύψος του τριγώνου ΕΚΖ.



α) Να υπολογίσετε :

i. Τον όγκο του στερεού.

ii. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

β) Αν γεμίσουμε με νερό το 25% του κώνου, να υπολογίσετε την απόσταση της στάθμης του νερού (σε ηρεμία) από το σημείο Κ.

Λύση:

Κύλινδρος

$\delta_{\kappa\upsilon\lambda} = 14 \Rightarrow R = 7cm$

$\upsilon_1 = 9cm$

Κώνος

$\delta_{\kappa\omega\nu} = 14 - 2 = 12 \Rightarrow \rho = 6\ cm$

π.θ $(KE)^2 + (KZ)^2 = (EZ)^2 \ \Rightarrow$

$\lambda^2 + \lambda^2 = 144 \ \Rightarrow \lambda = 6\sqrt{2}\ cm$

$\upsilon_2 = \rho = 6cm$

(α)i) $V = V_{\kappa\upsilon\lambda} - V_{\kappa\omega\nu} = \pi R^2 \upsilon_1 - \frac{\pi\rho^2\upsilon_2}{3} = 441\pi - 72\pi = 369\pi\ cm^3$

ii) $E_{o\lambda} = E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} + E_{\kappa(\kappa\upsilon\lambda\iota\nu\delta\rho o\upsilon)} + E_{\kappa(\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon)} + E_{\delta\alpha\kappa\tau} =$

$\pi R^2 + 2\pi R\upsilon + \pi\rho\lambda + (\pi R^2 - \pi\rho^2) =$

$\pi 7^2 + 2\pi \cdot 7 \cdot 9 + \pi 6 \cdot 6\sqrt{2} + (\pi 7^2 - \pi 6^2)=$

$49\pi + \ 126\pi \ \ + 36\sqrt{2}\,\pi \ \ + \ \ 13\pi = (188\pi + 36\sqrt{2}\pi)\ cm^2$

(β) 25% του $V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} = 25\% \cdot 72\pi = 18\pi\ cm^3$

$$V_{\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}} = \frac{\pi x^2 x}{3} = \frac{\pi x^3}{3}$$

$$\frac{\pi x^3}{3} = 18\pi \Rightarrow x^3 = 54 \Rightarrow x = \sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2} = 3.78cm$$