ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (37)
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 2 Ιουνίου 2014
8:00 – 11:00

Προτεινόμενες Λύσεις

ΜΕΡΟΣ Α΄

1.	Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{συν}x}{x-\frac{\pi}{2}}$ **<u>ΛΥΣΗ</u>** Παρατηρούμε ότι: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \text{συν}x=0$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$ Η απροσδιοριστία είναι της μορφής $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα De L'Hospital έχουμε: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{συν}x}{x-\frac{\pi}{2}} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{-\text{ημ}x}{1}=-1$	
2.	(α) Δίνεται ο πίνακας $B=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ με α, β, γ, δ $\in R$. Να αναφέρετε πότε ορίζεται ο αντίστροφος πίνακας του Β. (β) Αν ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, να δείξετε ότι $A^{-1} = A - 4I$, όπου I ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας. **<u>ΛΥΣΗ</u>** α) Ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα Β ορίζεται όταν η τιμή της ορίζουσας του είναι διάφορη από το μηδέν, $\|B\| \neq 0$,ή αν ισχύει σχέση αδ-βγ≠0. β) $A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$ $A-4I=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-4 & -2-0\\ 2-0 & -1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -5\end{pmatrix}=A^{-1}$	

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\chi+\frac{1}{1+4\chi^2}\right)d\chi$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\chi+\frac{1}{1+4\chi^2}\right)d\chi=\left[\frac{\chi^2}{2}+\frac{1}{2}\text{τοξεφ}2\chi\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\text{τοξεφ}\sqrt{3}-(0+0)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}=\frac{3}{8}+\frac{\pi}{6}$$

4. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)=\alpha\ln\chi+\beta\chi^2+2,\ \chi>0$ να έχει σημείο καμπής το σημείο . $A(1,3)$

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) $f(\chi)=\alpha\ln\chi+\beta\chi^2+2 \Rightarrow f(1)=3 \Rightarrow \beta+2=3 \Rightarrow \beta=1$

$f'(\chi)=\frac{\alpha}{\chi}+2\beta\chi \Rightarrow \quad f''(\chi)=-\frac{\alpha}{\chi^2}+2\beta$

$f''(1)=0 \Rightarrow -\alpha+2\beta=0 \Rightarrow \alpha=2$

Πράγματι για τις τιμές α=2 και β=1 έχουμε σημείο καμπής αφού για α=2 και β=1 θα έχουμε $f''(\chi)=-\frac{2}{\chi^2}+2 \Rightarrow f''(\chi)=0 \Rightarrow \chi=1$.

χ	0		1		$+\infty$
$f''(\chi)$	‖	-	0	+	
$f(\chi)$			Κ.Σ		

5. Ένας υπάλληλος εργάζεται σ' ένα ξενοδοχείο μόνο πέντε μέρες την εβδομάδα.

(α) Πόσες διαφορετικές επιλογές έχει ως προς τις μέρες που θα εργαστεί, αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στην επιλογή του.

(β) Σε πόσες από αυτές τις επιλογές ο υπάλληλος θα εργαζόταν το πολύ μια μέρα από το Σαββατοκύριακο .

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Έχει $\binom{7}{5}=21$ διαφορετικές επιλογές.

β) Από όλους τους δυνατούς τρόπους αφαιρούμε τις επιλογές που έχει αν δουλέψει το Σαββατοκύριακο δηλ.

έχει $\binom{7}{5}-\binom{5}{3}=21-10=11$ διαφορετικές επιλογές

6. Δίνεται ο κύκλος (Κ) με εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi - 8\psi - 80 = 0$

Να βρείτε:

(α) Το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

(β) Τις τιμές του α $(\alpha \in R)$ ώστε ο κύκλος (Κ) να αποκόπτει χορδή μήκους 16 μονάδων από την ευθεία $3\chi - 4\psi = \alpha$

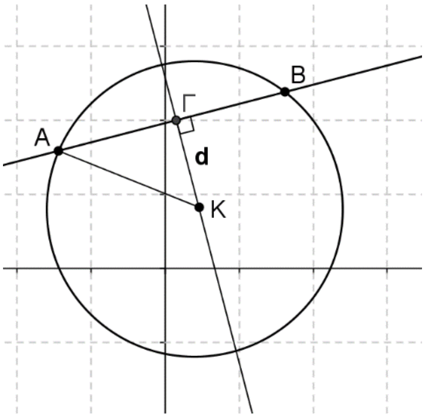
<u>ΛΥΣΗ</u>

α) $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi - 8\psi - 80 = 0$,

$g=-2$, $f=-4$, $c=-80$

$K(2,4)$,

$R = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4+16+80} = 10$



β) Π.Θ. $R^2=d^2+(A\Gamma)^2$

$100 = d^2+64 \Rightarrow d=6$ μον.

$d=\frac{|6-16-\alpha|}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow 6=\frac{|-10-\alpha|}{5} \Rightarrow -10-\alpha=\pm 30$

i) $-10-\alpha = 30 \Rightarrow \alpha=-40$

ιι) $-10-\alpha=-30 \Rightarrow \alpha=20$

7. Σ' ένα σχολείο φοιτούν 400 παιδιά. Από αυτά τα 250 είναι κορίτσια. Το 60% των κοριτσιών και το 20% των αγοριών ασχολούνται στον ελεύθερό τους χρόνο με το χορό.

(α) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί, ποια η πιθανότητα να ασχολείται με το χορό.

(β) Αν το παιδί που έχει επιλεγεί ασχολείται με το χορό, ποια η πιθανότητα να είναι αγόρι.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Κ:“ το παιδί είναι κορίτσι ”

Α:“ το παιδί είναι αγόρι”

Χ: “ Το παιδί να ασχολείται με το χορό”.

$P(K)=\frac{5}{8}$, $P(A)=\frac{3}{8}$, $P(X/K)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $P(X/A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

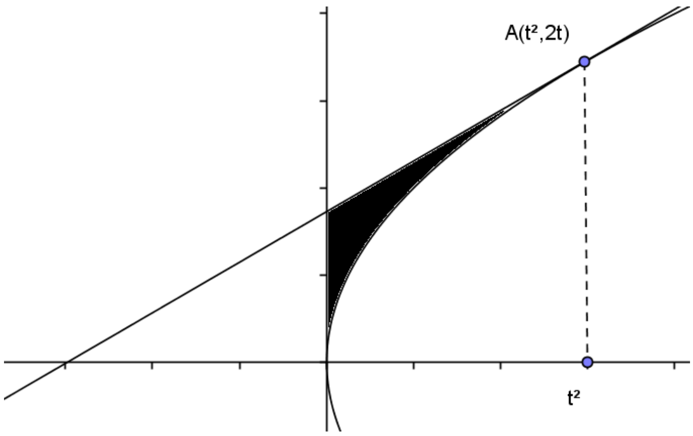
α) $P(X)=P(K\cap X)+P(A\cap X)=P(K)P(X/K)+P(A)P(X/A)$

$=\frac{5}{8}\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\frac{1}{5}=\frac{18}{40}=\frac{9}{20}$

β) $P(A/X)=\frac{P(A\cap X)}{P(X)}=\frac{\frac{3}{40}}{\frac{9}{20}}=\frac{1}{6}$

8.	(α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. (β) Αν για τη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(\chi) = 0$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ και $f(\alpha) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(\chi) = c$ **<u>ΛΥΣΗ</u>** α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β), τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να βρούμε ένα τουλάχιστο σημείο (ξ,f(ξ)) του διαγράμματος στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τη χορδή ΑΒ. $\lambda_{\varepsilon\varphi} = \lambda_{AB} \Rightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ β) Έστω $\chi \in R$.Η f είναι συνεχής στο [α,χ] ,παραγωγίσιμη στο (α,χ). Άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (\alpha,\chi)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\chi) - f(\alpha)}{\chi - \alpha} \Rightarrow \dfrac{f(\chi) - c}{\chi - \alpha} = 0 \Rightarrow f(\chi) = c$.	
9.	Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4\chi$ και το σημείο της $P(t^2, 2t)$, $t \in R - \{0\}$. (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο Ρ δίνεται από την εξίσωση (ε): $\psi t = \chi + t^2$ (β) Το χωρίο που περικλείεται από την εφαπτομένη (ε) , την παραβολή και τον άξονα $\psi'\psi$, περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα $\chi'\chi$ και παράγει όγκο $V(t)$. Αν $V(t) = \dfrac{16\pi}{3}$ κ.μ. , να υπολογίσετε τις τιμές του t. **<u>ΛΥΣΗ</u>** α) $\psi^2 = 4\chi \Rightarrow 2\psi\dfrac{d\psi}{d\chi} = 4 \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = \dfrac{2}{\psi}$ $\Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = \dfrac{2}{2t} = \dfrac{1}{t}$ Εξίσωση εφαπτομένης: $\psi - 2t = \dfrac{1}{t}(\chi - t^2) \Rightarrow t\psi - 2t^2 = \chi - t^2 \Rightarrow t\psi = \chi + t^2$	

β)



$$V=\pi\int_0^{t^2}(\psi_\varepsilon^2-\psi_\kappa^2)dx$$

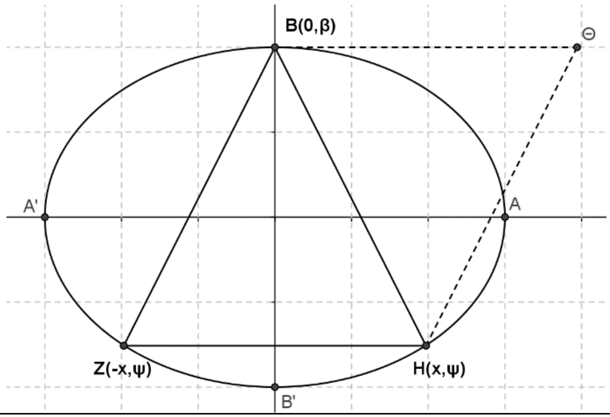
$$=\pi\int_0^{t^2}[(\frac{\chi}{t}+t)^2-4\chi]dx=\pi\int_0^{t^2}(\frac{\chi^2}{t^2}+2\chi+t^2-4x)dx=\pi\int_0^{t^2}(\frac{\chi^2}{t^2}-2\chi+t^2)dx$$

$$=\pi\left[\frac{\chi^3}{3t^2}-\chi^2+t^2\chi\right]_0^{t^2}=\pi\left[\frac{t^6}{3t^2}-t^4+t^4\right]=\frac{t^4}{3}\pi$$

$$\Rightarrow\pi\frac{t^4}{3}=\frac{16\pi}{3}\Rightarrow t^4=16\Rightarrow t=\pm 2$$

10. Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1,\ \alpha>\beta>0$. Ισοσκελές τρίγωνο ΒΖΗ , $(BZ=BH)$, εγγεγραμμένο στην έλλειψη, έχει κορυφές στο $B(0,\beta)$ και στα μεταβλητά σημεία της έλλειψης Ζ και Η. Αν Θ είναι σημείο του επιπέδου τέτοιο ώστε το τετράπλευρο ΒΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών Ζ και Η για τις οποίες το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΒΖΗΘ γίνεται μέγιστο.

<u>ΛΥΣΗ</u>



$E=2\chi(\beta-\psi)$

όμως $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1 \Rightarrow \chi=\pm\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\beta^2-\psi^2}$

$\Rightarrow E=\frac{2\alpha}{\beta}(\beta-\psi)\cdot\sqrt{\beta^2-\psi^2}$

$\frac{dE}{d\psi}=\frac{2\alpha}{\beta}[\frac{-2\psi}{2\sqrt{\beta^2-\psi^2}}(\beta-\psi)-\sqrt{\beta^2-\psi^2}]=$

$=\frac{2\alpha}{\beta}[\frac{-\beta\psi+\psi^2-(\beta^2-\psi^2)}{\sqrt{\beta^2-\psi^2}}]=\frac{2\alpha}{\beta}[\frac{2\psi^2-\beta\psi-\beta^2]}{\sqrt{\beta^2-\psi^2}}$

$\frac{dE}{d\psi}=0$ όταν $2\psi^2-\beta\psi-\beta^2=0\Rightarrow(2\psi+\beta)(\psi-\beta)=0$

$\Rightarrow\psi=-\frac{\beta}{2}$ ή $\psi=\beta$ απορρίπτεται.

E_{max} όταν οι κορυφές Ζ και Η είναι $Z(-\frac{\alpha\sqrt{3}}{2},-\frac{\beta}{2})$ και $H(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2},-\frac{\beta}{2})$

ψ	$-\beta$	$-\frac{\beta}{2}$	β
Ε΄(ψ)	+	0	-
Ε(ψ)	↗	Τ.Μ	↘

2ος τρόπος

Αν $H(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta,\beta\eta\mu\theta)$ και $Z(-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta,\beta\eta\mu\theta)$

$E(\theta)=(2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)(\beta-\beta\eta\mu\theta)$ για $\alpha\sigma\upsilon\nu\theta>0$

$E(\theta)=2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\theta-\alpha\beta\eta\mu2\theta$

$E'(\theta)=-2\alpha\beta\eta\mu\theta-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu2\theta$

$E'(\theta)=0 \Rightarrow -2\alpha\beta\eta\mu\theta-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu2\theta=0 \Rightarrow -2\alpha\beta(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu2\theta)=0$

$\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu2\theta=0 \qquad 1-2\eta\mu^2\theta+\eta\mu\theta=0$

$2\eta\mu^2\theta-\eta\mu\theta-1=0$

$\eta\mu\theta=-\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\eta\mu\theta=1$ απορρίπτεται διότι $\sigma\upsilon\nu\theta=0$

$\theta=\frac{11\pi}{6}$ ή $\theta=\frac{7\pi}{6}$ απορρίπτεται διότι $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}<0$

$E''(\theta)=-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\theta+4\alpha\beta\eta\mu2\theta$

$E''\left(\frac{11\pi}{6}\right)=-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{6}+4\alpha\beta\eta\mu\frac{11\pi}{3}<0$

Για $\theta=\frac{11\pi}{6}$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο

$H\left(\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{6},\beta\eta\mu\frac{11\pi}{6}\right)$ και $Z\left(-\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{6},\beta\eta\mu\frac{11\pi}{6}\right)$

$$H\left(\alpha\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\beta}{2}\right) \qquad Z\left(-\alpha\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\beta}{2}\right)$$

Υπάρχουν και άλλα ισοσκελή τρίγωνα με κορυφή το $B(0,\beta)$ εγγεγραμμένα στην έλλειψη με πλευρά ZH μη παράλληλη με τον $\chi'\chi$ όμως, δεν δίδουν μέγιστο εμβαδόν.

ΜΕΡΟΣ Β΄

1 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(\chi)=\dfrac{\chi^2-4}{\chi^2-1}$

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να την παραστήσετε γραφικά.

ΛΥΣΗ

Πεδίο ορισμού: $A=R-\{-1,1\}$

Σημεία τομής με άξονες συντεταγμένων:

Για $\chi=0$ έχουμε $(0,4)$ και

Για $\psi=0$ έχουμε $(2,0)$ και $(-2,0)$.

Μονοτονία-ακρότατα: Παραγωγίζοντας την συνάρτηση παίρνουμε

$$f'(\chi)=\frac{2\chi\left(\chi^2-1\right)-2\chi(\chi^2-4)}{\left(\chi^2-1\right)^2}=\frac{6x}{\left(\chi^2-1\right)^2}=0\Rightarrow f'(\chi)=0\Rightarrow \chi=0$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Χ	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
f΄(χ)	-	‖	-	0	+	‖	+
f(χ)	↘	‖	↘	Τ.Ε	↗	‖	↗

Η f είναι

- Γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0,1)$ και $(1,+\infty)$
- Γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(-1,0]$

Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=4$, δηλαδή Τ.Ε$(0,4)$

Ασύμπτωτες:

Οριζόντια ασύμπτωτη:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\chi^2-4}{\chi^2-1}=1$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\chi^2-4}{\chi^2-1}=1$$

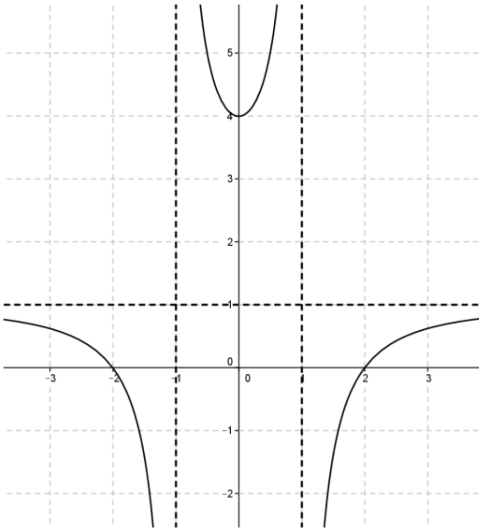
Άρα, $y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη όταν $\chi\to\pm\infty$.

<u>Κατακόρυφες ασύμπτωτες:</u>

$\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{\chi^2-4}{\chi^2-1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{\chi^2-4}{\chi^2-1}=+\infty$,άρα χ=-1 κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\chi^2-4}{\chi^2-1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\chi^2-4}{\chi^2-1}=+\infty$,άρα χ=1 κατακόρυφη ασύμπτωτη

<u>Γραφική παράσταση:</u>



2 Δίνεται η λέξη «ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ».

(α) (i) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης.

(ii) Αν επιλεγεί στη τύχη ένας από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α: “ ο αναγραμματισμός να περιέχει τα τρία Α συνεχόμενα”

Β: “ ο αναγραμματισμός να περιέχει τα τρία Α συνεχόμενα και τα δυο Τ σε μη διαδοχικές θέσεις”

(β) Να βρείτε πόσες λέξεις μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τέσσερα από τα γράμματα της λέξης «ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ».

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) $M_{\varepsilon}^{10}=\frac{10!}{3!2!}=302400$

	ii) $N(\Omega)$=302400 , $N(A)=\frac{8!}{2!}$=20160 $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20160}{302400}=\frac{1}{15}$ ιι) $N(\Omega)$=302400 , $N(B)=\binom{7}{2}\cdot 6!$=15120 $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{15120}{302400}=\frac{1}{20}$. β) Διακρίνουμε τις εξής περιπτωσεις: ι) 3Α και 1 διαφορετικό γράμμα, $\binom{6}{1}\cdot\frac{4!}{3!}=24$ ή ιι) 2Α και 2 διαφορετικά γράμματα, $\binom{6}{2}\cdot\frac{4!}{2!}=180$ ή ιιι) 2Τ και 2 διαφορετικά γράμματα, $\binom{6}{2}\cdot\frac{4!}{2!}=180$ ή ιv) 2Τ και 2Α $\frac{4!}{2!2!}=6$ v) όλα τα γράμματα διαφορετικά, $\binom{7}{4}\cdot 4!=840$. Σύνολο λέξεων: $24+180+180+6+840=1230$.	
3	Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: R $\to$ R για την οποία ισχύουν: $2\chi f(\chi)+\chi^2\left(f'(\chi)-3\right)=-f'(\chi)$ για κάθε $\chi\in$ R και $f(1)=\frac{1}{2}$ (α) Να αποδείξετε ότι $f(\chi)=\frac{\chi^3}{\chi^2+1}$, $\chi\in$ R (β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες χ=α, χ=β , 0<α<β , τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{\chi^3}{f(\chi)}$, $\chi\neq 0$ και τον άξονα $\chi'\chi$ είναι $E=\frac{(\beta-\alpha)\cdot\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+3\right)}{3}$ **<u>ΛΥΣΗ</u>** α) Η δεδομένη σχέση γράφεται: $2\chi f(\chi)+\chi^2\left(f'(\chi)-3\right)=-f'(\chi)$ $2\chi f(\chi)+f'(\chi)\left(\chi^2+1\right)=3\chi^2$ ή $\left[f(\chi)\left(\chi^2+1\right)\right]'=3\chi^2$ Οι συναρτησεις είναι και στα δύο μέλη συνεχείς , άρα ολοκληρώνοντας έχουμε	

$f(\chi)(\chi^2+1)=\int 3\chi^2 d\chi \Rightarrow f(\chi)(\chi^2+1)=\chi^3+c$

$f(1)=\frac{1}{2} \Rightarrow f(1)\cdot 2=1+c \Rightarrow c=0$

$f(\chi)=\frac{\chi^3}{\chi^2+1} \quad \chi \in \mathbb{R}.$

β) Η συνάρτηση $g(\chi)=\frac{\chi^3}{f(\chi)} = \frac{\chi^2+1}{\chi^3}\cdot\chi^3 = \chi^2+1,\ \chi \neq 0$, είναι θετική στο $\mathbb{R}$, άρα

$$E=\int_\alpha^\beta (\chi^2+1)dx = \left(\frac{\chi^3}{3}+\chi\right)_\alpha^\beta = \frac{\beta^3}{3}+\beta-\frac{\alpha^3}{3}-\alpha$$

$$= \frac{\beta^3}{3}-\frac{\alpha^3}{3}+\beta-\alpha = \frac{\beta^3-\alpha^3}{3}+\beta-\alpha =$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+3)}{3}$$

4

Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{9}+\frac{\psi^2}{4}=1$, και σημείο $P(3\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$ πάνω σε αυτή.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο Ρ είναι $2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\chi + 3\eta\mu\theta\cdot\psi = 6$

(β) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Ρ τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ.

(γ) Στα σημεία Γ και Δ φέρουμε ευθείες κάθετες στους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Τ. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Τ, καθώς το σημείο Ρ κινείται πάνω στην έλλειψη.

(δ) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των χορδών ΡΑ′ και ΡΒ′ αντίστοιχα, όπου τα σημεία Α′ και Β′ είναι οι κορυφές της έλλειψης με συντεταγμένες $A'(-3, 0)$ και $B'(0, -2)$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ρ ώστε η ευθεία ΚΛ να είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Ρ.

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της έλλειψης $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$

έχουμε: $\frac{2\chi}{\alpha^2}+\frac{2\psi}{\beta^2}\cdot\frac{d\psi}{d\chi}=0 \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi}=-\frac{\chi\beta^2}{\psi\alpha^2}$

Επομένως στο σημείο $P(3\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$, η κλίση της εφαπτομένης (ε) είναι:

$$\lambda_\varepsilon = -\frac{3\sigma\upsilon\nu\theta\cdot 4}{2\eta\mu\theta\cdot 9} = -\frac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{3\eta\mu\theta}$$

Άρα η εξίσωση της (ε) είναι:

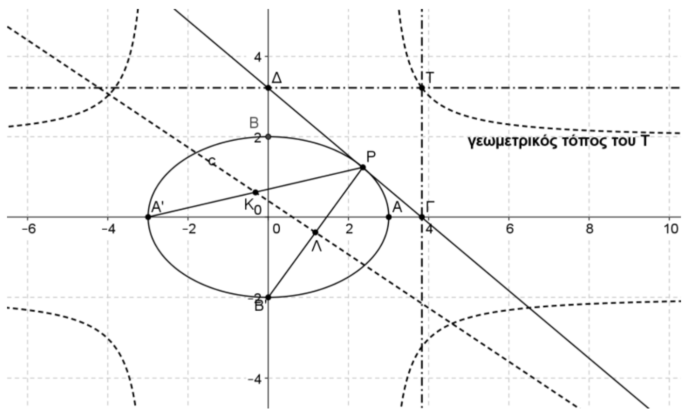
$$\psi - 2\eta\mu\theta = -\frac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{3\eta\mu\theta}(\chi - 3\sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow 3\psi\eta\mu\theta - 6\eta\mu^2\theta = -2\chi\sigma\upsilon\nu\theta + 6\sigma\upsilon\nu^2\theta \Rightarrow$$

$$2\chi\,\sigma\upsilon\nu\theta + 3\psi\eta\mu\theta = 6.$$

β) Για $\chi=0$
στην προηγούμενη εξίσωση εφαπτομένης της έλλειψης παίρνουμε

$\psi = \frac{2}{\eta\mu\theta}$, άρα $\Delta\left(0, \frac{2}{\eta\mu\theta}\right)$

Για $\psi = 0$, έχουμε $\chi = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ άρα $\Gamma\left(\frac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta}, 0\right)$.



γ) Οι συντεταγμένες του σημείου T είναι $\mathrm{T}\left(\frac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \frac{2}{\eta\mu\theta}\right)$, έπομένως

$\chi = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{\chi}$, και $\psi = \frac{2}{\eta\mu\theta} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{2}{\psi}$

Υψώνοντας στις δύο τελευταίες σχέσεις και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{9}{\chi^2} \quad \text{και} \quad \eta\mu^2\theta = \frac{4}{\psi^2}$$

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

Προσθέτωντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ισότητες παίρνουμε την καρτεσιανή εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου T,

$$\frac{9}{\chi^2} + \frac{4}{\psi^2} = 1$$

δ) οι συντεταγμένες των σημείων K και Λ αντίστοιχα είναι:

$$\mathrm{K}\left(\frac{3(\sigma\upsilon\nu\theta - 1)}{2}, \eta\mu\theta\right) \text{ και } \Lambda\left(\frac{3\sigma\upsilon\nu\theta}{2}, \eta\mu\theta - 1\right)$$

επομένως η κλίση της ευθείας ΚΛ είναι: $\lambda_{ΚΛ} = -\dfrac{2}{3}$

Από την υπόθεση ΚΛ//(ε), έχουμε για $\theta \neq 2\kappa\pi$, κ ∈ Ά

$$-\frac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{3\eta\mu\theta} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sigma\varphi\theta = 1 \Rightarrow \theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

και οι λύσεις της στο $(0,2\pi)$ είναι $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ και $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$

Επομένως οι συντεταγμένες του Ρ είναι

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) \text{ ή } \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$$

5 (α) Δίνεται η συνάρτηση $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = 2 + 2x - \ln x$.

(i) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.

(ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\ln x}{2} < 1 + x, \quad \forall x \in (0,+\infty)$

(β) Αν $f(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} \frac{e^t t^2}{1+e^t}\,dt, \quad x \in [1,+\infty)$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση

$t = -u$ να αποδείξετε ότι

$$f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{2}{3} \cdot (\ln x)^2 \cdot (1+x)$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) (i)Παραγωγίζοντας την συνάρτηση $g(x) = 2 + 2x - \ln x$, έχουμε

$g'(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$, $g'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Αν $x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow g'(x) < 0$ και αν $x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow g'(x) > 0$.

Αρα η g θα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\left(\dfrac{1}{2}, 3+\ln 2\right)$

(ii) Αφού η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \dfrac{1}{2}$

$\forall x \in (0,+\infty)\ g(x) \geq g\left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow 2 + 2x - \ln x \geq 3 + \ln 2 > 0$.Συνεπώς $\dfrac{\ln x}{2} < 1 + x$.

β) Έχουμε $\quad f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \displaystyle\int_0^{\ln\frac{1}{x}} \frac{e^t t^2}{1+e^t}\,dt = \int_0^{-\ln x} \frac{e^t t^2}{1+e^t}\,dt$.

Χρησιμοποιώντας την δοθείσα αντικατάσταση θα πάρουμε

$dt = -du$ και τα νέα όρια $\begin{matrix} t = 0 & u = 0 \\ t = -\ln x & u = \ln x \end{matrix}$, της ολοκλήρωσης

$$f\left(\frac{1}{\chi}\right)=\int_0^{\ln\frac{1}{\chi}}\frac{e^t t^2}{1+e^t}dt=\int_0^{-\ln\chi}\frac{e^t t^2}{1+e^t}dt=-\int_0^{\ln\chi}\frac{e^{-u}u^2}{1+e^{-u}}du=-\int_0^{\ln\chi}\frac{u^2}{1+e^u}du=-\int_0^{\ln\chi}\frac{t^2}{1+e^t}dt.$$

Άρα ,
$$f(\chi)-f\left(\frac{1}{\chi}\right)=\int_0^{\ln\chi}\frac{e^t t^2}{1+e^t}dt+\int_0^{\ln\chi}\frac{t^2}{1+e^t}dt=\int_0^{\ln\chi}\frac{\left(1+e^t\right)t^2}{1+e^t}dt$$
$$=\int_0^{\ln\chi}t^2dt=\frac{(\ln\chi)^3}{3}\ .$$

Χρησιμοποιώντας την ανίσωση του (α) θα πάρουμε
$$f(\chi)-f\left(\frac{1}{\chi}\right)=\frac{(\ln\chi)^3}{3}=(\ln\chi)^2\frac{\ln\chi}{3}\le\frac{2}{3}(\ln\chi)^2(1+\chi)$$

με την ισότητα να ισχύει για $\chi=1$.