

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Γυμνασίου

Ενότητα 3: Ακέραιοι Αριθμοί



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Γυμνασίου

Ενότητα 3: Ακέραιοι Αριθμοί

Συγγραφή:

Ομάδα Υποστήριξης Μαθηματικών

Συντονισμός έκδοσης:

Χρίστος Παρπούνας, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Έκδοση 2011

ISBN 978-9963-0-4563-1

**© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ**

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

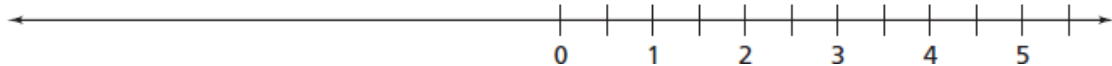
Εξερεύνηση

1. Στη Γεωγραφία μαθαίνουμε ότι το ψηλότερο σημείο στην Ευρώπη είναι η κορυφή του Λευκού Όρους στη Γαλλία, με υψόμετρο 4810 m από το επίπεδο της θάλασσας. Το αντίστοιχο χαμηλότερο χερσαίο σημείο βρίσκεται στις εκβολές του Βόλγα στην Κασπία Θάλασσα (λίμνη) με υψόμετρο -28m.

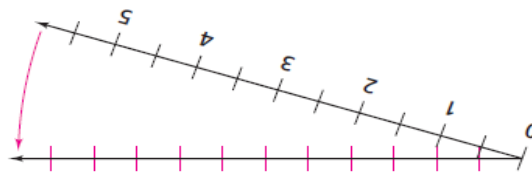


✓ Τι αντιπροσωπεύει το υψόμετρο -28 μέτρα;

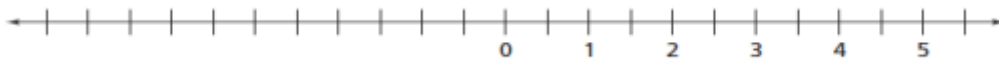
2. Στο δημοτικό σχολείο χρησιμοποιούσατε κυρίως την αριθμητική γραμμή που είχε ως αρχή το 0, όπως φαίνεται πιο κάτω.



- ✓ Διπλώστε την πιο πάνω γραμμή στο σημείο 0, όπως φαίνεται πιο κάτω, και σημειώστε τα αντίστοιχα διαστήματα.



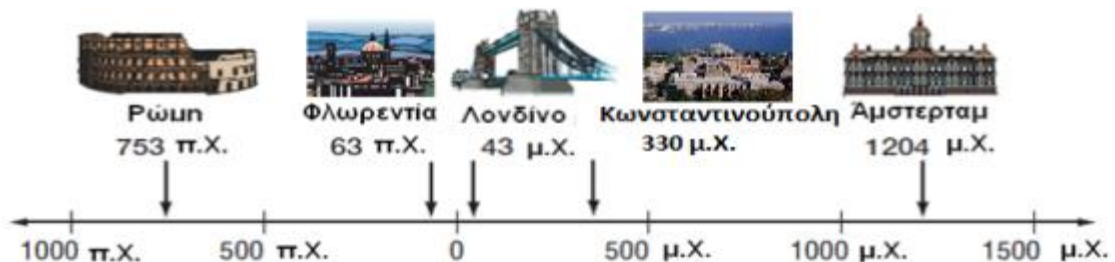
Ονομάστε τα σημεία της γραμμής που βρίσκονται αριστερά του 0.



3. **Τεχνολογία:** Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «Integer_Line.ggb».

✓ Να σύρετε τον δρομέα A. Τι παρατηρείτε;

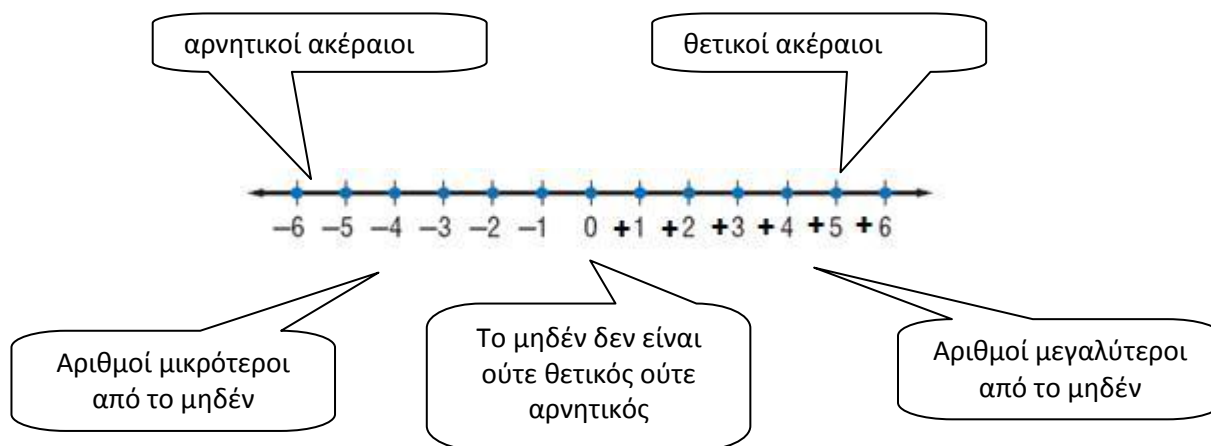
4. Μελετήστε την πιο κάτω γραμμή του χρόνου, η οποία δείχνει το έτος ίδρυσης μερικών πόλεων της Ευρώπης. Πώς συνδέεται η γραμμή χρόνου με την αριθμητική γραμμή;



Τι πρέπει να ξέρετε

- **Αρνητικός αριθμός** είναι ένας αριθμός μικρότερος από το μηδέν. **Θετικός αριθμός** είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος από το μηδέν.

Αριθμοί όπως 86 ή -86 ονομάζονται **ακέραιοι**. Ακέραιος είναι οποιοσδήποτε αριθμός από το σύνολο $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Με άλλα λόγια ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς και το μηδέν.



- Τα σύμβολο «+» ή «-» ονομάζεται **πρόσημο** του αριθμού, μπαίνει μπροστά από τον αριθμό και τον χαρακτηρίζει ως θετικό ή αρνητικό αριθμό, αντίστοιχα.

Κάθε αριθμός που γράφεται χωρίς πρόσημο θεωρείται θετικός αριθμός. Για παράδειγμα, $+6 = 6$, και $+43 = 43$.

- Αν δυο αριθμοί έχουν το ίδιο πρόσημο λέγονται **ομόσημοι**. Αν έχουν διαφορετικό πρόσημο λέγονται **ετερόσημοι**.
- Μπορούμε να συγκρίνουμε ακέραιους αριθμούς, βρίσκοντας τη θέση τους στην ευθεία των αριθμών. Για παράδειγμα, ο αριθμός -6 βρίσκεται αριστερά του αριθμού 4. Αυτό σημαίνει πως το -6 είναι μικρότερο του 4. Μια πρόταση που συγκρίνει δυο διαφορετικούς αριθμούς λέγεται **ανισότητα**. Οι ανισότητες περιέχουν τα σύμβολα < και >.

-6 μικρότερο του $+4$ $\rightarrow -6 < +4$ $4 > -6$ \leftarrow 4 μεγαλύτερο του -6

Διερεύνηση

Οι θερμοκρασίες στις μεγάλες ευρωπαϊκές πόλεις, σε μια χειμωνιάτικη μέρα αποτυπώνονται στο χάρτη. Ένας μετεωρολόγος θέλει να κατατάξει τις πόλεις σε σειρά με βάση τις θερμοκρασίες τους ξεκινώντας από την πόλη με τη χαμηλότερη θερμοκρασία. Μπορείτε να τον βοηθήσετε;



- ✓ Να τοποθετήσετε σε αριθμητική γραμμή τις θερμοκρασίες των πόλεων του χάρτη.
- ✓ Ποια πόλη έχει τη χαμηλότερη θερμοκρασία τη συγκεκριμένη μέρα;
- ✓ Ποιες πόλεις έχουν θερμοκρασία μεταξύ των -3°C και $+3^{\circ}\text{C}$;

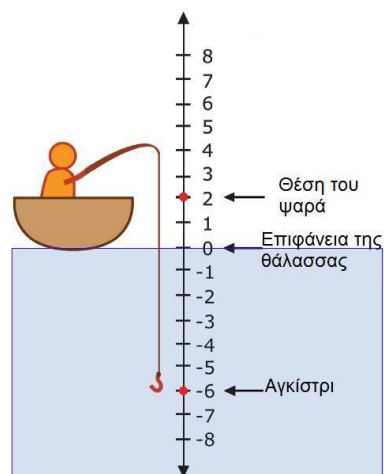
Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Ένας ψαράς κάθεται στη βάρκα του 2m πάνω από το επίπεδο της θάλασσας. Το αγκίστρι του βρίσκεται σε βάθος 6m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας. Χρησιμοποιήστε ακέραιους αριθμούς για να δώσετε τη θέση που βρίσκεται το αγκίστρι και ο ψαράς.

Λύση:

Η επιφάνεια της θάλασσας αντιστοιχεί στο 0. Ο ψαράς βρίσκεται 2 μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Επομένως βρίσκεται στο +2. Το αγκίστρι του βρίσκεται 6 μέτρα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας, δηλαδή στο -6.



- Να γράψετε έναν ακέραιο που ερμηνεύει καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις:
 - (α) 15 βαθμοί κελσίου πάνω από το μηδέν.
 - (β) Βαθμολογικό κέρδος τριών πόντων στο πρωτάθλημα.
 - (γ) Απώλεια 20 ευρώ
 - (δ) 8 βήματα πίσω

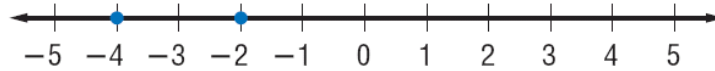
Λύση:

(α) +15 (β) +3 (γ) -20 (δ) -8

- Να συμπληρώσετε το κενό με το κατάλληλο σύμβολο, « > , < » ώστε η πρόταση « -2 _____ -4 » να είναι αληθής.

Λύση:

Τοποθετούμε σε αριθμητική γραμμή τους αριθμούς -2 και -4



Παρατηρούμε ότι το -2 βρίσκεται δεξιά του -4. Επομένως, $-2 > -4$.

1. Να τοποθετήσετε τους ακέραιους αριθμούς των επόμενων συνόλων σε αντίστοιχες αριθμητικές γραμμές.

(α) $\{0, 1, -3\}$ (β) $\{-4, 5, 4\}$ (γ) $\{-5, -1, 10, -9\}$

2. Να γράψετε έναν ακέραιο αριθμό που να αντιστοιχεί σε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις:

- i. Κέρδος €9
- ii. Χρέος €300.
- iii. Η μάχη του Μαραθώνα το 490 π.Χ.
- iv. 12° C κάτω από το μηδέν.
- v. Το σημείο βρασμού του νερού 100° C.
- vi. Μέσο ύψος πτήσης επιβατικού αεροσκάφους 10000 m.
- vii. Το υποβρύχιο βρίσκεται σε βάθος 200 m.

3. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο $>$, $<$, για να είναι αληθείς οι επόμενες σχέσεις.

(α) -7 _____ 5 (γ) -6 _____ -9
(β) 3 _____ 7 (δ) 2 _____ -2

4. Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους ακέραιους αριθμούς:

$-28, 33, -35, 31, -37$

5. Να βάλετε σε φθίνουσα σειρά τους ακέραιους αριθμούς:

$8, -13, -19, 0, 11, -15$

6. Στο διπλανό πίνακα παρουσιάζεται η μέση θερμοκρασία, σε βαθμούς κελσίου, στην επιφάνεια του Ερμή, του Άρη, της Γης και της Σελήνης. Με βάση τον πίνακα να γράψετε τρεις δικές σας προτάσεις που να συγκρίνουν τις θερμοκρασίες των πλανητών.

Όνομα	Θερμοκρασία Επιφάνειας
Δίας	-107
Σελήνη	-23
Άρης	-62
Γη	15



7. Να συμπληρώσετε τις ακολουθίες:

(α) $3, 1, -1, _, _$ (β) $-10, -7, -4, _, _$ (γ) $11, 9, 6, 2, _, _$

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Διερεύνηση

Ο Γιάννης και η Μαρία οδηγούν τα ποδήλατά τους, αναχωρώντας από το σπίτι του Ανδρέα. Ύστερα από λίγο ο Γιάννης βρίσκεται 4 km μακριά από το σπίτι του Ανδρέα, οδηγώντας το ποδήλατό του ανατολικά και η Μαρία βρίσκεται 4 km μακριά, οδηγώντας το ποδήλατό της δυτικά.
Ποιο παιδί βρίσκεται πιο μακριά από το σπίτι του Ανδρέα;



- ✓ Να εκφράσετε τις αποστάσεις των παιδιών από το σπίτι του Ανδρέα με ακέραιους αριθμούς.
- ✓ Να τοποθετήσετε τους αριθμούς σε αριθμητική γραμμή. Σε τι θα μπορούσε να αντιστοιχεί η θέση του σπιτιού του Ανδρέα στην αριθμητική γραμμή;
- ✓ Ποια σύμβολα χρησιμοποιείτε, για να δείξετε την κατεύθυνση του Γιάννη και της Μαρίας;

Τι πρέπει να ξέρετε

Η απόσταση ενός αριθμού από το μηδέν πάνω στην ευθεία των αριθμών λέγεται **απόλυτη τιμή** ή **μέτρο** του αριθμού. Στην αριθμητική γραμμή που ακολουθεί, παρατηρήστε ότι οι αριθμοί -4 και 4 απέχουν εξίσου 4 μονάδες από το 0. Η απόλυτη τιμή είναι και για τους δυο αριθμούς 4.



Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού συμβολίζεται με δυο κατακόρυφες γραμμές αριστερά και δεξιά του αριθμού:

Η απόλυτη τιμή του 4 είναι 4 $\rightarrow | +4 | = 4$

$| -4 | = 4 \leftarrow$ Η απόλυτη τιμή του -4 είναι 4

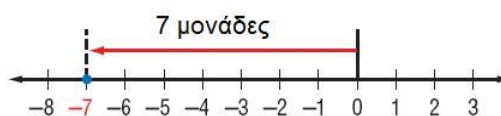
Κάθε ακέραιος αριθμός έχει έναν **αντίθετο** αριθμό. Ο αντίθετος ενός ακέραιου έχει ακριβώς την ίδια απόσταση από το μηδέν, δηλαδή έχει την ίδια απόλυτη τιμή, αλλά διαφορετικό πρόσημο.

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Να υπολογίσετε την απόλυτη τιμή του -7
Λύση:

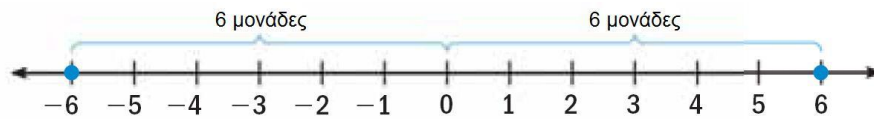
Το -7 βρίσκεται 7 μονάδες μακριά από το μηδέν. Η απόλυτη τιμή του είναι 7, δηλαδή $| -7 | = 7$.



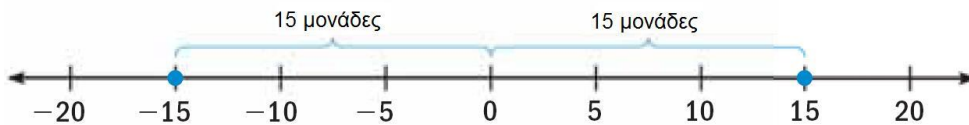
- Να βρείτε τον αντίθετο αριθμό του (α) 6 και (β) -15 .

Λύση:

(α) Ο αντίθετος αριθμός του 6 είναι το -6 .



(β) Ο αντίθετος αριθμός του -15 είναι το 15 .



- Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $|5| + |-6|$ και (β) $|5 - 3| + |-10|$

Λύση:

$$(α) |5| + |-6| = 5 + 6 = 11$$

$$(β) |5 - 3| + |-10| = |2| + |-10| \\ = 2 + 10 \\ = 12$$

- Αν $\alpha = -12$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $|9| + |\alpha|$

Λύση:

$$|9| + |\alpha| = |9| + |-12| \\ = 9 + 12 \\ = 21$$

1. Να γράψετε:
 - (α) τον αντίθετο του 12,
 - (β) την απόλυτη τιμή του 12
 - (γ) τον αντίθετο του -9
 - (δ) την απόλυτη τιμή του -9

2. Να εξηγήσετε γιατί η απόλυτη τιμή του 0 είναι 0;

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Αριθμός	2			-13				
Αντίθετος					-8	15		
Απόλυτη Τιμή			4					9

4. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι ορθές και ποιες λανθασμένες; Αν μια πρόταση είναι λάθος, να αλλάξετε έναν από τους αριθμούς για να κάνετε την πρόταση ορθή.

- | | | |
|----------------|-----------------|-------------------|
| (α) $-8 > 5$ | (β) $-7 < 0$ | (γ) $ -9 = 9$ |
| (δ) $ 5 < -6$ | (ε) $10 > -8 $ | (στ) $16 > -16 $ |

5. Να απλοποιήσετε τα επόμενα:

- | | | |
|-----------------|-----------------|---------------------|
| (α) $-(-2)$ | (β) $-(-7)$ | (γ) $-(-20)$ |
| (δ) $-(-(-10))$ | (ε) $-(- -30)$ | (στ) $-(-(-(-40)))$ |

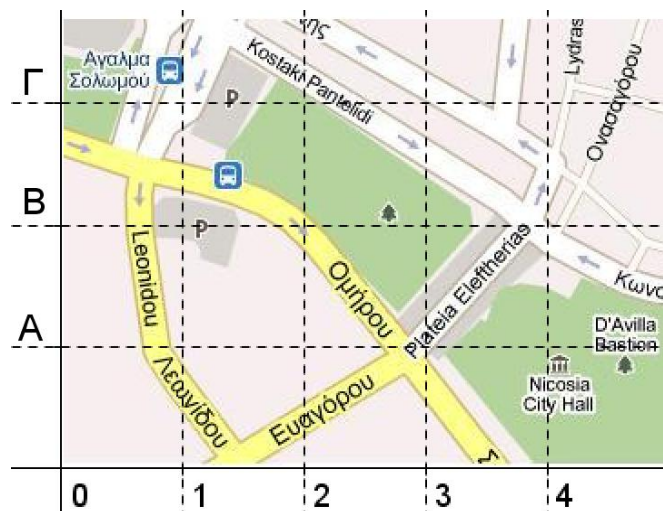
6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων, όταν $\alpha = -2$ και $\beta = -13$

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------|
| (α) $ \alpha + \beta $ | (β) $-\alpha + (-\beta)$ | (γ) $-\alpha + \beta $ |
| (δ) $ \beta - \alpha $ | (ε) $- \beta $ | (στ) $- \alpha $ |

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΟΥ

Εξερεύνηση

- ✓ Να χρησιμοποιήσετε τα γράμματα και τους αριθμούς στο χάρτη, για να δείξετε τη συμβολή των οδών Ομήρου και Ευαγόρου.
- ✓ Πώς θα μπορούσατε να δείξετε το σταθμό αστικών λεωφορείων στο «Άγαλμα Σολωμού»;
- ✓ Ένας τουρίστας θέλει να επισκεφτεί το δημαρχείο Λευκωσίας (City Hall). Να δείξετε τη θέση στο χάρτη με τη βοήθεια των αριθμών και των γραμμάτων.



Τι πρέπει να ξέρετε

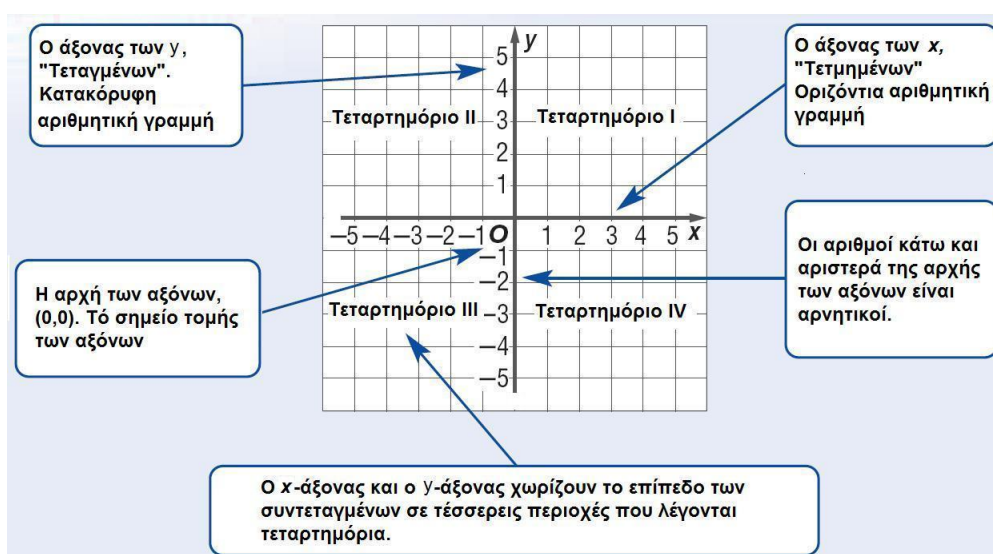
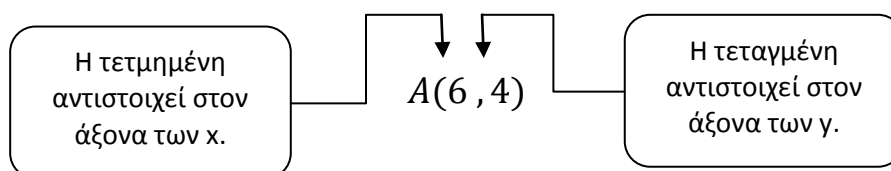
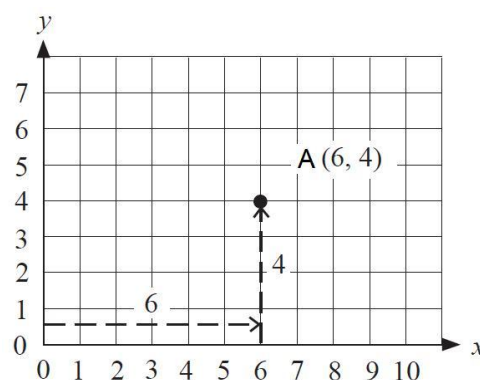
- Για να βρούμε τη θέση σημείων σε χάρτες χρησιμοποιούμε ένα πλέγμα από οριζόντιες και κατακόρυφες ευθείες που λέγεται **σύστημα συντεταγμένων**.
- Η θέση ενός σημείου πάνω στην οριζόντια ευθεία των αριθμών ορίζεται από έναν αριθμό που λέγεται **τετμημένη** του σημείου.



Έτσι το σημείο A έχει τετμημένη -5 και το σημείο B έχει τετμημένη 4.

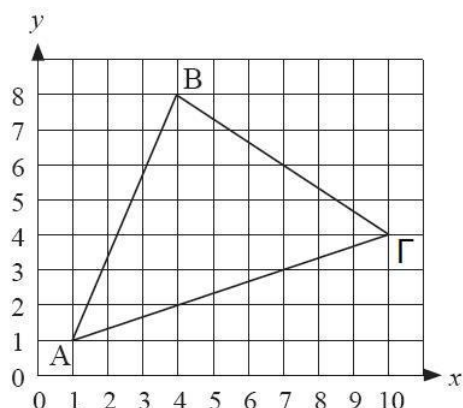
- Η θέση ενός σημείου στο επίπεδο μπορεί να οριστεί από ένα **διατεταγμένο ζεύγος** αριθμών (α, β) που λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου. Σε ένα πλέγμα, που καθορίζεται από δυο αριθμημένους άξονες, ο οριζόντιος άξονας λέγεται **άξονας των τετμημένων** και ο κατακόρυφος, **άξονας των τεταγμένων**. Το γράφημα δίπλα δείχνει τη θέση του σημείου $A(6,4)$.

Ο πρώτος αριθμός σε ένα διατεταγμένο ζεύγος είναι η τετμημένη και ο δεύτερος είναι η τεταγμένη.



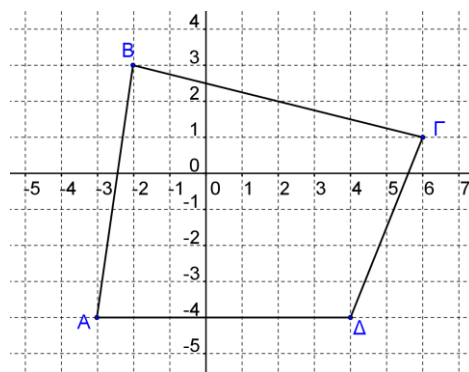
Διερεύνηση

1. Να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΑΒΓ.



2. Να γράψετε τις συντεταγμένες των κορυφών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

- ✓ Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται καθεμιά από τις κορυφές του τετραπλεύρου;



3. Στην καλαθοσφαίρα κάθε καλάθι έξω από τη γραμμή των τριών πόντων μετρά 3 πόντους. Ο πίνακας δείχνει τις επιτυχημένες βολές τριών πόντων των τεσσάρων παικτών μιας ομάδας.

Βολές (x)	Πόντοι (y)
0	0
1	3
2	6
3	9



- ✓ Να σχηματίσετε διατεταγμένα ζεύγη (βολές, πόντοι) για κάθε παίκτη.
- ✓ Να σημειώσετε σε σύστημα αξόνων τα σημεία που αντιστοιχούν στα διατεταγμένα ζεύγη.
- ✓ Να ενώσετε τα σημεία με μια συνεχή γραμμή.
- ✓ Να περιγράψετε το γράφημα που προκύπτει και τη σχέση ανάμεσα στις βολές (x) και τα τρίποντα (y).

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

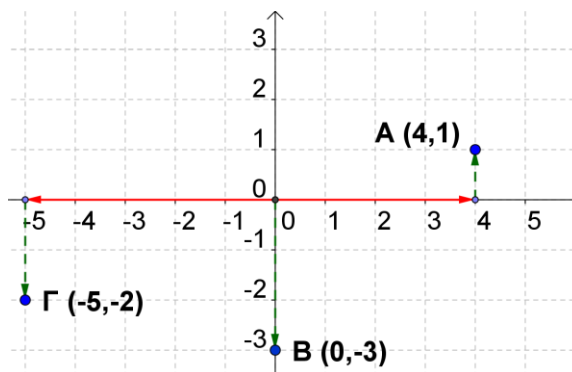
- Να τοποθετήσετε τα σημεία $A(4, 1)$, $B(0, -3)$ και $\Gamma(-5, -2)$ σε σύστημα αξόνων. Να περιγράψετε τη θέση του κάθε σημείου.

Λύση:

Ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων προχωρούμε 4 μονάδες δεξιά και μετά μια μονάδα πάνω. Το σημείο A βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο.

Για το σημείο B, ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων προχωρούμε 3 μονάδες κάτω. Το σημείο B βρίσκεται πάνω στον άξονα των y .

Τέλος, για το σημείο Γ προχωρούμε 5 μονάδες αριστερά της αρχής των αξόνων και μετά 2 μονάδες κάτω. Το σημείο Γ βρίσκεται στο 3^ο τεταρτημόριο.



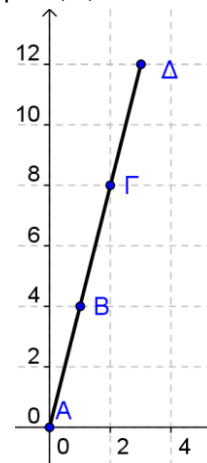
- Η Ελένη παίρνει επίδομα €4 την ημέρα.
(α) Να γράψετε μια σχέση που να δίνει το επίδομα που δικαιούται η Ελένη ύστερα από x ημέρες.
(β) Να γράψετε τα διατεταγμένα ζεύγη (ημέρες, συνολικό επίδομα), για 0, 1, 2 και 3 ημέρες.
(γ) Να τοποθετήσετε τα σημεία σε σύστημα αξόνων και να τα ενώσετε με μια συνεχή γραμμή. Ποια είναι η σχέση του επιδόματος και των ημερών;

Λύση:

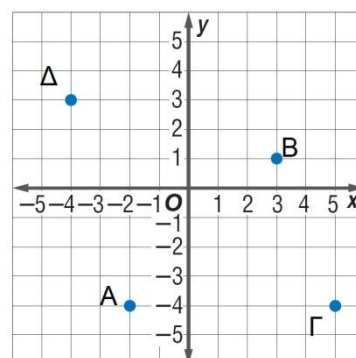
(α) Η σχέση είναι η $y = 4x$ όπου y συμβολίζει το συνολικό επίδομα και x τον αριθμό των ημερών.

(β) Τα διατεταγμένα ζεύγη είναι: $(0, 0)$ $(1, 4)$ $(2, 8)$ και $(3, 12)$.

(γ) Όλα τα σημεία που βρίσκονται σε μια ευθεία γραμμή, ονομάζονται **συνευθειακά**. Η σχέση των ημερών και του επιδόματος είναι γραμμική.



1. (α) Να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων A , B , Γ και Δ του διαγράμματος, που φαίνεται δίπλα.
(β) Σε τετραγωνισμένο χαρτί να κατασκευάσετε σύστημα αξόνων πάνω στο οποίο να τοποθετήσετε τα σημεία: $K(2, -1)$, $L(-3, -2)$, $M(4, 1)$, και $N(-2, 4)$.



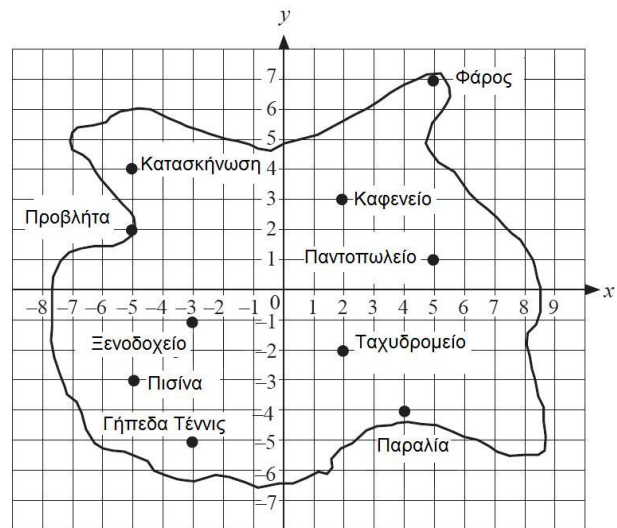
2. Ο χάρτης δείχνει ένα μικρό νησάκι και τις τοποθεσίες σημαντικών σημείων του νησιού.

(α) Να δώσετε τις συντεταγμένες της θέσης:

- i. της κατασκήνωσης,
- ii. του ξενοδοχείου,
- iii. της παραλίας,
- iv. της πισίνας,
- v. του καφενείου.

(β) Να βρείτε τρία σημεία στο χάρτη που έχουν την ίδια τετμημένη.

(γ) Να γράψετε τις σημαντικές τοποθεσίες και τις συντεταγμένες τους που βρίσκονται στο τρίτο και τέταρτο τεταρτημόριο.



3. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να κατασκευάσετε σύστημα αξόνων πάνω στο οποίο.

(α) Να σημειώσετε τα ακόλουθα σημεία:

$(4,0)$, $(-4,0)$, $(0,4)$, $(0,-4)$, $(1,2)$, $(1,-2)$, $(3,3)$, $(3,-3)$, $(2,1)$,
 $(2,-1)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$, $(-3,3)$, $(-3,-3)$, $(-2,1)$, $(-2,-1)$.

(γ) Να ενώσετε τα σημεία με μια συνεχή γραμμή ώστε να σχηματιστεί ένα αστέρι.

4. Να αποφασίσετε κατά πόσο οι επόμενες προτάσεις είναι πάντοτε, κάποτε ή ποτέ αληθείς. Να εξηγήσετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα για να στηρίξετε την απόφασή σας.

(α) Τόσο η τετμημένη όσο και η τεταγμένη σημείου στο πρώτο τεταρτημόριο είναι αρνητικές.

(β) Η τετμημένη σημείου που βρίσκεται στον άξονα των x είναι αρνητική.

(γ) Η τεταγμένη σημείου στο τέταρτο τεταρτημόριο είναι αρνητική.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να συμπληρώσετε τα κενά με τα σύμβολα $<$, $>$ και $=$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $0 \quad \underline{\quad} \quad -1$ (β) $5 \quad \underline{\quad} \quad -6$ (γ) $-9 \quad \underline{\quad} \quad -7$ (δ) $-6 \quad \underline{\quad} \quad -1$

(ε) $-7 \quad \underline{\quad} \quad -2$ (στ) $0 \quad \underline{\quad} \quad 12$ (ζ) $-9 \quad \underline{\quad} \quad -10$ (η) $+4 \quad \underline{\quad} \quad -11$

(θ) $-3 \quad \underline{\quad} \quad -(+3)$ (ι) $-(-6) \quad \underline{\quad} \quad -6$ (ια) $0 \quad \underline{\quad} \quad -|-4|$ (ιβ) $-5 \quad \underline{\quad} \quad |-5|$

2. Να γράψετε ακέραιους αριθμούς που να αντιστοιχούν στις επόμενες εκφράσεις:
- Χρέωση €130
 - Βρίσκεσαι στο πολυκατάστημα και παίρνεις τον ανελκυστήρα. Ανεβαίνεις 6 ορόφους και μετά κατεβαίνεις 2 ορόφους.
 - Η θερμοκρασία ανεβαίνει 12°C κατά τη διάρκεια της ημέρας και κατεβαίνει 8°C κατά τη διάρκεια της νύκτας.

3. Να γράψετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς: -7 , 4 , -5 , και 6 .

4. Να γράψετε σε φθίνουσα σειρά τους αριθμούς: -2 , 5 , 0 , και -3 .

5. Να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

(α) $|-13|$

(β) $|0| + |-17|$

(γ) $|2| - |-13|$

(δ) $|6 - 8| + |9 - 5|$

(ε) $|14 - 7| - |5 - 8|$

(στ) Ο αντίθετος του 0

6. Να βρείτε δύο ακέραιους αριθμούς των οποίων,

- οι απόλυτες τιμές έχουν άθροισμα 12
- οι απόλυτες τιμές έχουν διαφορά 12
- οι απόλυτες τιμές έχουν γινόμενο 12
- οι απόλυτες τιμές έχουν πηλίκο 12

7. Να εξετάσετε κατά πόσο οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ετερόσημοι σε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις.

- Ο αριθμός α είναι ομόσημος του -5 και ο αριθμός β είναι ετερόσημος του $+4$.
- Ο αριθμός α είναι ετερόσημος του -3 και ο αριθμός β είναι ετερόσημος του 6 .
- Ο αριθμός α είναι ομόσημος του $+7$ και ο αριθμός β είναι ομόσημος του 9 .
- Ο αριθμός α είναι ομόσημος του -4 και ο αριθμός β είναι ετερόσημος του -2 .
- Ο αριθμός α είναι ετερόσημος του -8 και ο αριθμός β είναι ετερόσημος του -7 .
- Ο αριθμός α είναι ομόσημος του 6 και ο αριθμός β είναι ομόσημος του -1 .

8. Να τοποθετήσετε στο σύστημα αξόνων τα ακόλουθα σημεία:

K(5,6)

Λ(-2,10)

M(7, -8)

Π(-1, -7)

P(0,6)

Σ(-3,7)

Υ(8,1)

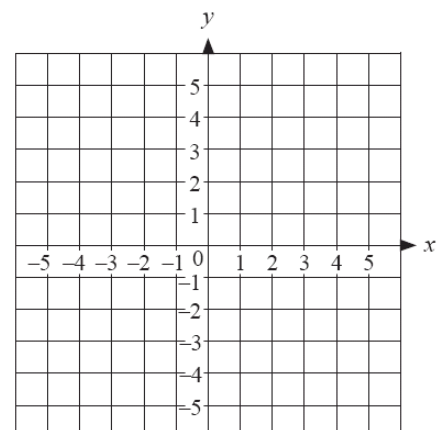
T(5, -2)

N(3,0)

Φ(-4,0)

X(0, -5)

Ω(-4, -4)



9. Να δώσετε τις συντεταγμένες τυχαίου σημείου που βρίσκεται:
- (α) Πάνω στον άξονα των τετμημένων,
 - (β) Πάνω στον άξονα των τεταγμένων,
 - (γ) Πάνω στη διχοτόμο ευθεία των αξόνων.
10. Σε σύστημα αξόνων τοποθετήστε τα σημεία $A(-3, -2)$, $B(-3, 6)$, $\Gamma(5, 6)$, και $\Delta(5, -2)$.
Να ενώστε τα σημεία με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα. Να χαρακτηρίσετε το σχήμα που προκύπτει. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
11. Να αποφασίσετε κατά πόσο οι επόμενες προτάσεις είναι πάντοτε, κάποτε ή ποτέ αληθείς. Να εξηγήσετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα για να στηρίξετε την απόφασή σας.
- (α) Το μέτρο (απόλυτη τιμή) ενός θετικού ακέραιου είναι αρνητικός ακέραιος αριθμός.
 - (β) Αν α και β είναι ακέραιοι αριθμοί με $\alpha > \beta$, τότε $|\alpha| > |\beta|$.
 - (γ) Αν α και β είναι ακέραιοι, τότε $\alpha - |\beta| \leq \alpha + \beta$.
12. Το x παριστάνει έναν ακέραιο αριθμό. Για ποιες τιμές του x θα ισχύουν οι σχέσεις:
- (α) $-14 < x < -7$
 - (β) $-4 > x > -6$
 - (γ) $-3 < x < 4$
13. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων, αν $\alpha = 5$, $\beta = -8$, $\gamma = -3$, και $\delta = 9$.
- (α) $|\beta| + 7$
 - (β) $\alpha - |\gamma|$
 - (γ) $\delta + |\beta|$
 - (δ) $6|\beta| + \delta$

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

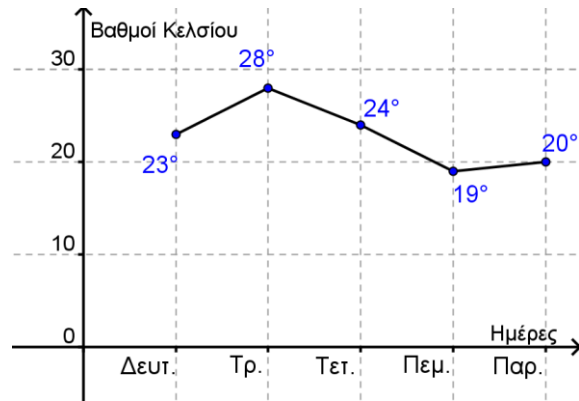
Πρόσθεση Ακέραιων Αριθμών

Εξερεύνηση

Η διπλανή γραφική παράσταση παρουσιάζει τη μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία για μια συγκεκριμένη εβδομάδα (Δευτέρα – Παρασκευή).

(α) Να βρείτε την αύξηση ή την μείωση της θερμοκρασίας σε σχέση με την προηγούμενη ημέρα, από τη Τρίτη μέχρι και την Παρασκευή. Να εκφράσετε τις αυξομειώσεις της θερμοκρασίας με κατάλληλο ακέραιο αριθμό.

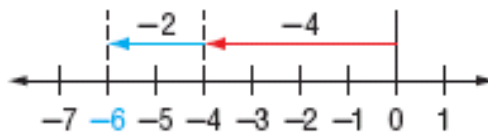
(β) Να γράψετε μια αριθμητική παράσταση που να λαμβάνει υπόψη τις καθημερινές αυξομειώσεις της θερμοκρασίας για να υπολογίσετε τη συνολική διαφορά της θερμοκρασίας ανάμεσα στη Δευτέρα και την Παρασκευή.



Άθροισμα Ομόσημων Αριθμών

Διερεύνηση

1. Με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής να περιγράψετε τον τρόπο, με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $-4 + (-2)$.



Στη συνέχεια, να παραστήσετε σε αριθμητική γραμμή το άθροισμα των πιο κάτω αριθμών:

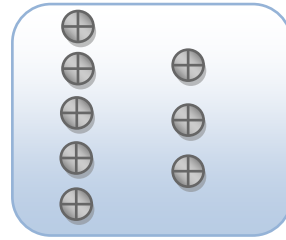
(α) $-3 + (-2)$

(β) $2 + 5$

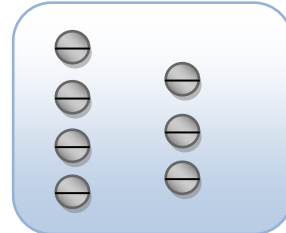
(γ) $-6 + (-7)$

2. Τα αριθμητικά πλακίδια είναι μικρές πλάκες ή μικροί κύκλοι στους οποίους αναγράφονται τα σύμβολα $+$ και $-$. Στις εικόνες φαίνεται ο τρόπος που χρησιμοποίησε ένας μαθητής, για να βρει τα αθροίσματα των πιο κάτω ομόσημων αριθμών : (α) $+5 + (+3)$ και (β) $-4 + (-3)$.

$$(\alpha) +5 + (+3) = 8$$



$$(\beta) -4 + (-3) = -7$$



- ✓ Να περιγράψετε τον τρόπο, με τον οποίο μπορείτε να υπολογίζετε αθροίσματα, χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά πλακίδια.
- ✓ Να σχεδιάσετε πλακίδια για να δείξετε το άθροισμα $(-3) + (-7)$. Να επιβεβαιώσετε την απάντησή σας με υπολογιστική μηχανή και με αριθμητική γραμμή.



3. **Τεχνολογία:** Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «Number_Line_Tiles.ggb». Να μετακινήσετε τους δρομείς «α» και «β» και να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα.

(α)	$5 + 3$	(β)	$(-5) + (-3)$
(γ)	$2 + 11$	(δ)	$(-2) + (-11)$
(ε)	$11 + 4$	(στ)	$(-11) + (-4)$
(ζ)	$13 + 12$	(η)	$(-13) + (-12)$

- ✓ Να διατυπώσετε ένα γενικό κανόνα για το πώς μπορούμε να υπολογίζουμε το άθροισμα ομόσημων αριθμών.

Τι πρέπει να ξέρετε

- Για να προσθέτουμε ομόσημους ακέραιους αριθμούς:
 - Προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους.
 - Στο άθροισμα θέτουμε το πρόσημο των αριθμών.
- Το άθροισμα δυο ομόσημων ακέραιων αριθμών είναι:
 - Θετικός αριθμός, αν οι προσθετέοι είναι θετικοί.
 - Αρνητικός αριθμός, αν οι προσθετέοι είναι αρνητικοί.

Δραστηριότητες

Παραδείγματα:

- Υπολογίστε το άθροισμα, $+12 + (+15)$

Λύση:

$$+12 + (+15) = \quad \text{Οι αριθμοί είναι ομόσημοι.}$$

$$+(12 + 15) = +27 \quad \text{Προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους.}$$

Το άθροισμα δυο θετικών ακεραίων αριθμών είναι θετικός ακέραιος αριθμός.

- Υπολογίστε το άθροισμα, $-26 + (-19)$

Λύση:

$$-26 + (-19) = \quad \text{Οι αριθμοί είναι ομόσημοι.}$$

$$-(26 + 19) = -45 \quad \text{Προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους.}$$

Το άθροισμα δυο αρνητικών ακεραίων είναι αρνητικός ακέραιος αριθμός.

1. Να κάνετε τις επόμενες πράξεις:

(α) $+3 + (+5)$

(β) $12 + (+23)$

(γ) $-45 + (-55)$

(δ) $+34 + 53$

(ε) $-29 + (-12)$

Άθροισμα Ετερόσημων Αριθμών

Διερεύνηση

1. Με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής να περιγράψετε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $+5 + (-2)$.

$$+5 + (-2) = 3$$



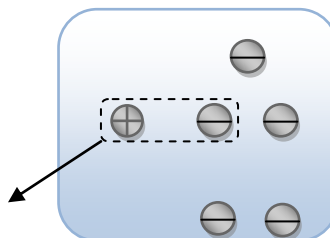
Στη συνέχεια να παραστήσετε σε αριθμητική γραμμή το άθροισμα των πιο κάτω ετερόσημων αριθμών:

(α) $3 + (-2)$

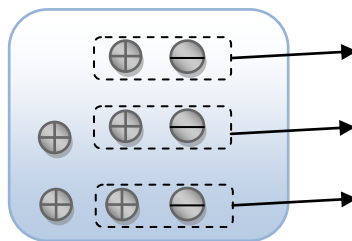
(β) $-4 + 3$

2. Στις εικόνες φαίνεται ο τρόπος που χρησιμοποίησε ένας μαθητής, για να βρει τα αθροίσματα των πιο κάτω ετερόσημων αριθμών :

(α) $1 + (-5) = -4$



$$(\beta) 5 + (-3) = 2$$



- ✓ Να περιγράψετε τον τρόπο με τον οποίο μπορείτε να υπολογίζετε το άθροισμα ετερόσημων αριθμών, χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά πλακίδια.
- ✓ Να σχεδιάσετε πλακίδια για να δείξετε το άθροισμα $(-3) + (+7)$. Να επιβεβαιώσετε την απάντησή σας με υπολογιστική μηχανή και με αριθμητική γραμμή.



3. **Τεχνολογία:** Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «Αριθμητική Γραμμή _ Πλακίδια.ggb». Να υπολογίσετε τα αθροίσματα των πιο κάτω ετερόσημων αριθμών.

(α)	$5 + (-3)$	(β)	$(-5) + (+3)$
(γ)	$(-2) + 11$	(δ)	$(-2) + (-11)$
(ε)	$(3) + (-3)$	(στ)	$(-4) + (+4)$

- ✓ Να διατυπώσετε ένα γενικό κανόνα για το πώς μπορούμε να υπολογίζουμε το άθροισμα ομόσημων αριθμών.

Τι πρέπει να ξέρετε

- Για να προσθέτουμε ετερόσημους ακέραιους αριθμούς:
 - Αφαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους.
 - Στο άθροισμα θέτουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.
 - Το άθροισμα δυο αντίθετων αριθμών είναι μηδέν $a + (-a) = 0$.

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Υπολογίστε το άθροισμα $-20 + 4$

Λύση:

$$-20 + 4 =$$

Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι.

$$-(20 - 4) = -16$$

Αφαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους.

Θέτουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

- Υπολογίστε το άθροισμα, $38 + (-17)$

Λύση:

$38 + (-17) =$ Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι.
 $+(38 - 17) = +21$ Αφαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους.
 Θέτουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

1. Να βρείτε τα αθροίσματα με χρήση της αριθμητικής γραμμής :

(α) $-4 + 6$ (β) $-5 + 8$ (γ) $-1 + 3$
 (δ) $-4 + 7$ (ε) $2 + (-3)$ (στ) $-1 + (-4)$

2. Να βρείτε τα αθροίσματα:

(α) $2 + (-3)$ (β) $-6 + 6$ (γ) $-7 + 4$
 (δ) $-6 + 2$ (ε) $-7 + 2$ (στ) $5 + (-5)$
 (ζ) $-11 + 13 + 6$ (η) $12 + (-17) + (-25)$ (θ) $-16 + (-21) + 15$

3. Να συμπληρώσετε τους επόμενους πίνακες πρόσθεσης ακέραιων αριθμών.

(α)

+	-4	-2	0	2	4
-3					
-1					
1					
3					

(β)

+		1		3	
-5	-5				-1
		-3			
				0	
	-2		0		

4. Η θερμοκρασία περιβάλλοντος σε μια χειμωνιάτικη ημέρα είναι -5°C . Αν η θερμοκρασία πέσει ακόμα 4 βαθμούς, ποια θα είναι η θερμοκρασία περιβάλλοντος;
5. Το βράδυ η θερμοκρασία στην επιφάνεια του πλανήτη Άρη κατεβαίνει μέχρι και -85°C . Κατά τη διάρκεια της ημέρας η θερμοκρασία μπορεί να ανεβεί μέχρι 100 βαθμούς από το σημείο που ήταν το βράδυ. Ποια είναι η μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία στον Άρη;
6. Να γράψετε μια έκφραση που να περιγράφει καθεμιά από τις επόμενες καταστάσεις. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα.
 (α) Ένα υποβρύχιο καταδύεται 35 m και στη συνέχεια αναδύεται 21 m.

(β) Ένα σκουλήκι κατά τη διάρκεια της νύκτας ανεβαίνει 45 cm προς την επιφάνεια και την ημέρα κατεβαίνει 38 cm .

7. Να υπολογίσετε τις επόμενες αριθμητικές παραστάσεις όταν $x = -10$, $y = 7$ και $z = -8$.

- | | | |
|---------------|--------------|------------------|
| (α) $x + 14$ | (β) $6 + y$ | (γ) $z + (-5)$ |
| (δ) $-17 + y$ | (ε) $20 + z$ | (στ) $-10 + x$ |
| (ζ) $z + 8$ | (η) $15 + x$ | (θ) $x + y$ |
| (ι) $y + z$ | (ια) $x + z$ | (ιβ) $x + y + z$ |

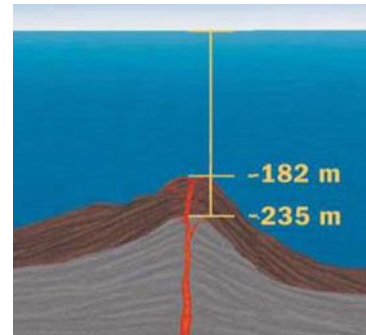
8. Να διατυπώσετε ένα πραγματικό πρόβλημα, χρησιμοποιώντας την εξίσωση $-8 + 13 = t$. Στη συνέχεια να λύσετε το πρόβλημα και να ερμηνεύσετε τη λύση.

Αφαίρεση Ακεραίων

Εξερεύνηση

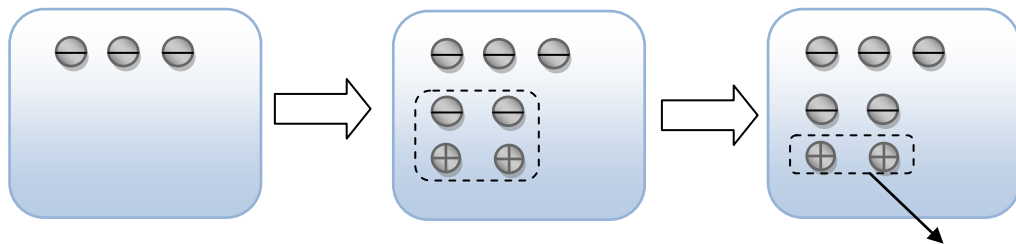
Το ηφαίστειο Κίκεμ-Νζένη στην καραϊβική θάλασσα είναι υποθαλάσσιο. Οι εκρήξεις του ηφαιστείου ανεβάζουν το ύψος του. Το 1962 το ηφαίστειο είχε ύψος -235 m . Το 2002 η το ηφαίστειο είχε ύψος -182 m .

- ✓ Υπολογίστε τη διαφορά του ύψους του ηφαιστείου ανάμεσα στις δυο μετρήσεις που έγιναν.



Διερεύνηση

1. Στις εικόνες φαίνεται ο τρόπος που χρησιμοποίησε ένας μαθητής, για να βρει τη διαφορά, $(-3) - (+2)$.

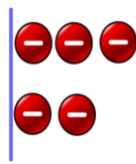
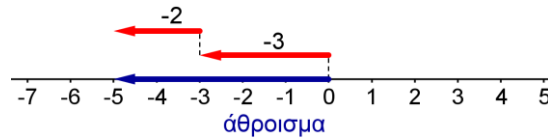


Τοποθετούμε 3 αρνητικά πλακίδια.

Στη συνέχεια πρέπει να αφαιρέσουμε 2 θετικά πλακίδια, που όμως δεν υπάρχουν. Τοποθετούμε 2 ζευγάρια μηδενικών πλακιδίων. Τέλος, αφαιρούμε 2 θετικά πλακίδια. Παραμένουν 5 αρνητικά πλακίδια.

Επομένως, $(-3) - (+2) = -5$

- ✓ Να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμά σας με αριθμητική γραμμή.



2. Να χρησιμοποιήσετε τα πλακίδια, για να βρείτε τη διαφορά $-5 - (-2)$. Να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμά σας με υπολογιστική μηχανή.



3. **Τεχνολογία:** Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «Number_Line_Tiles.ggb». Να μετακινήσετε τους δρομείς «α» και «β» και να υπολογίσετε τις επόμενες διαφορές.

(α) $1 - (-2)$ (β) $-10 - (-7)$ (γ) $-6 - (-8)$ (δ) $-4 - 5$ (ε) $6 - 12$

- ✓ Να διατυπώσετε ένα γενικό κανόνα για το πώς μπορούμε να υπολογίζουμε τη διαφορά δυο ακέραιων αριθμών.

Τι πρέπει να ξέρετε

- Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό α τον αριθμό β , προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β , δηλαδή,

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Υπολογίστε τη διαφορά, $9 - 12$.

Λύση:

$$9 - 12 = 9 + (-12) \quad \text{Για να αφαιρέσουμε } 12, \text{ προσθέτουμε τον αντίθετο, } -12 \\ = -3$$

- Υπολογίστε τη διαφορά, $7 - (-15)$.

Λύση:

$$7 - (-15) = 7 + (+15) \quad \text{Για να αφαιρέσουμε το } -15, \text{ προσθέτουμε τον αντίθετό του,}$$

$$= 7 + 15 \quad \text{δηλαδή το } +15.$$

$$= 22$$

- Η θερμοκρασία τήξης του υδράργυρου είναι περίπου -39°C και του αλουμινίου είναι περίπου 660°C . Ποια είναι η διαφορά των θερμοκρασιών τήξης των δυο στοιχείων;
Λύση:

$$660 - (-39) = 660 + (+39) = 660 + 39 = 699$$

- Τα ερπετά και άλλα ζώα κατατάσσονται στα ποικιλόθερμα είδη, που σημαίνει πως δεν μπορούν να ρυθμίσουν από μόνα τους τη θερμοκρασία του σώματος τους και για αυτό έχουν πάντα τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Τα είδη αυτά δεν επιβιώνουν σε ακραίες θερμοκρασίες. Ένα κατοικίδιο ερπετό, για να κρατηθεί ζωντανό, ρυθμίζεται η θερμοκρασία του χώρου που το φιλοξενεί στους 27°C με περιθώριο απόκλισης 4 βαθμών πάνω-κάτω. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και τη μέγιστη θερμοκρασία επιβίωσης του ερπετού με δύο διαφορετικούς τρόπους.

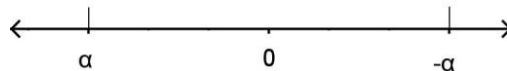


Λύση:

(α' τρόπος)

Η έκφραση $|x| = \alpha$, με α οποιοδήποτε θετικό αριθμό, είναι ισοδύναμη με την

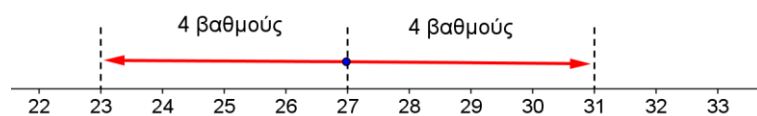
$$|x - 0| = \alpha.$$



Και οι δυο εκφράσεις δηλώνουν ότι η απόσταση του x από το 0 είναι α .

Ισοδύναμα, η έκφραση $|x - 27| = 4$ δηλώνει ότι η απόσταση του x από το 27 είναι 4.

Επομένως $x = 23$ και $x = 31$.



1. Να υπολογίσετε τις ακόλουθες διαφορές:

(α) $-9 - 5$

(β) $0 - 10$

(γ) $-8 - 9$

(δ) $17 - 13$

(ε) $27 - (-8)$

(στ) $-25 - (-5)$

(ζ) $12 - 26$

(η) $4 - (-19)$

(θ) $-11 - 42$

(ι) $15 - (-14)$

(ια) $-27 - (-19)$

(ιβ) $-18 - (-20)$

(ιγ) $31 - 48$

(ιδ) $52 - (-52)$

(ιε) $-37 - (-37)$

2. Αν $\kappa = -6$, $\lambda = 7$ και $\mu = 9$, να βρείτε την τιμή των επόμενων παραστάσεων:

(α) $5 - \kappa$

(β) $\mu - (-9)$

(γ) $\kappa - \lambda$

(δ) $\mu - \kappa$	(ε) $\kappa - 6$	(στ) $\lambda - \mu$
(ζ) $4 - (-\lambda)$	(η) $-\mu - 10$	(θ) $-\kappa - \mu$

3. Ποια είναι η τιμή του $|\alpha - \beta|$ όταν, $\alpha = -17$ και $\beta = -9$.
4. Το υψίπεδο Ματάπα στην Ιορδανία, ανατολικά της Νεκράς Θάλασσας, έχει ύψος 1340 m. Το βαθύτερο σημείο της Νεκράς Θάλασσας είναι 799 m κάτω από το επίπεδο της θάλασσας. Ποια είναι η υψομετρική διαφορά μεταξύ του βαθύτερου σημείου της Νεκράς Θάλασσας και του υψιπέδου Ματάπα;
5. Να αποφασίσετε κατά πόσο οι επόμενες προτάσεις είναι πάντοτε, κάποτε ή ποτέ αληθείς. Εξηγήστε ή δώστε αντιπαράδειγμα για να στηρίξετε την απόφασή σας.
- (α) *Αρνητικός - Θετικός = Αρνητικός*
 (β) *Αρνητικός - Αρνητικός = Θετικός*
 (γ) *Θετικός - Θετικός = Θετικός*
 (δ) *Θετικός - Αρνητικός = Αρνητικός*
6. Κατά τη διάρκεια μιας χειμωνιάτικης νύκτας η θερμοκρασία έπεσε από τους 5°C στους -12°C. Πόσους βαθμούς έπεσε η θερμοκρασία;
7. Ένα μπαούλο με θησαυρό κρύφτηκε το 67π.Χ. και βρέθηκε το 323μ.Χ. Για πόσο χρονικό διάστημα ήταν κρυμμένο το μπαούλο;
8. Να γράψετε τους επόμενους 5 όρους των ακολουθιών:
- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| (α) 10, 8, 6, 4, ... | (β) -10, -7, -4, -1, ... |
| (γ) 19, 14, 9, 4, ... | (δ) -1, -3, -5, -7, ... |
| (ε) -20, -16, -12, -8, ... | (στ) -5, -10, -15, -20, ... |
| (ζ) 18, 15, 12, 9, ... | (η) -16, -12, -8, -4, ... |
9. Να γράψετε με δικά σας λόγια τι σημαίνουν οι πιο κάτω προτάσεις:
- (α) $|x| = \alpha$
 (β) $|x - 0| = \alpha$
 (γ) $|x - 15| = 7$
 (δ) $|20 - x| = 5$
10. Ένας επαγγελματίας ποδοσφαιριστής έχει την καλύτερη επίδοση του σε ηλικία 26 χρόνων με απόκλιση 7 χρόνια πάνω κάτω. Να υπολογίσετε με δύο τρόπους το εύρος της ηλικίας, στην οποία ο ποδοσφαιριστής έχει την καλύτερη επίδοσή του.
11. Μια οικογένεια ξοδεύει €523 κάθε μήνα σε είδη πρώτης ανάγκης με περιθώριο απόκλισης €35.
- (α) Να γράψετε μια εξίσωση για τον υπολογισμό του ελάχιστου και μέγιστου ύψους μηνιαίων εξόδων της οικογένειας.
 (β) Να βρείτε το ελάχιστο και μέγιστο ύψος των μηνιαίων εξόδων.

Πολλαπλασιασμός Ακεραίων

Εξερεύνηση

Ένα αμφίβιο όχημα που συμμετέχει στην αρχαιολογική έρευνα του ναυαγίου του Μαζωτού, Νότια της Κύπρου, καταδύεται 23 m το λεπτό μέχρι να φτάσει στο βυθό που είναι το ναυάγιο. Ο πίνακας δείχνει το βάθος, στο οποίο βρίσκεται το όχημα σε διάφορες χρονικές στιγμές.

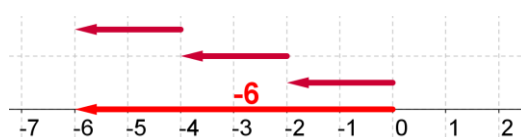
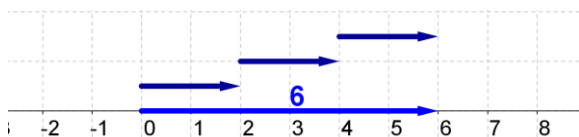
- ✓ Να γράψετε δυο διαφορετικές αθροιστικές προτάσεις που να υπολογίζουν το βάθος του οχήματος.
- ✓ Να γράψετε μια πολλαπλασιαστική πρόταση που θα μπορούσε επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του βάθους του οχήματος.
- ✓ Να γράψετε μια πολλαπλασιαστική πρόταση που να δίνει το βάθος του οχήματος ύστερα από 7 λεπτά.



Χρόνος (λεπτά)	Βάθος (m)
1	-23
2	-46
⋮	

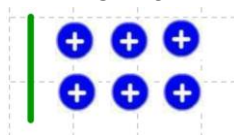
Διερεύνηση

1. Να χρησιμοποιήσετε την αριθμητική γραμμή, για να περιγράψετε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τα γινόμενα, (α) $3 \cdot 2$, (β) $3 \cdot (-2)$.

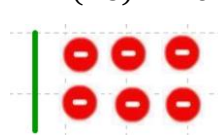


- ✓ Να χρησιμοποιήσετε την αριθμητική γραμμή για να παραστήσετε τα γινόμενα, (α) $2 \cdot (-4)$, (β) $4 \cdot 3$ (γ) $3 \cdot (-2)$.
 - ✓ Να γράψετε μια αθροιστική έκφραση που να αντιστοιχεί σε καθένα από τα πιο πάνω γινόμενα.
2. Ένας μαθητής χρησιμοποιεί τα αριθμητικά πλακίδια για να υπολογίσει τα γινόμενα, (α) $2 \cdot 3$ και (β) $2 \cdot (-3)$. Ο τρόπος που εργάστηκε φαίνεται στις επόμενες εικόνες.
- ✓ Να περιγράψετε τον τρόπο που εργάστηκε.

(α) $2 \cdot 3 = 6$

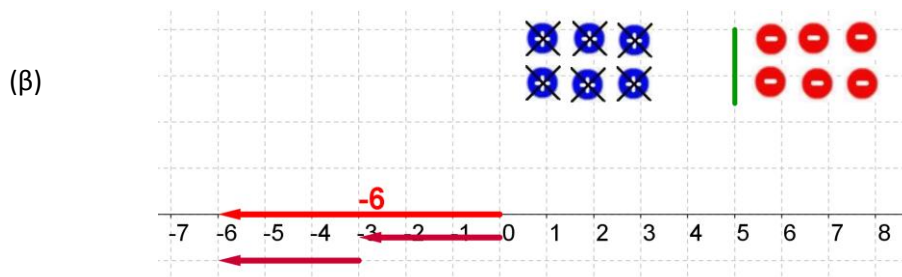
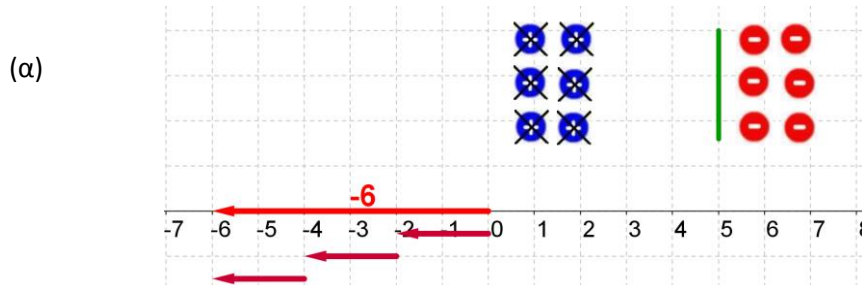


(β) $2 \cdot (-3) = -6$

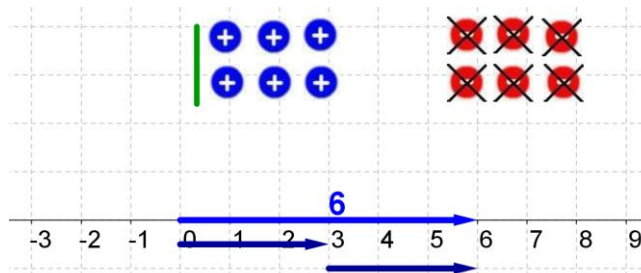


Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός μπορεί να θεωρηθεί ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση

3. Στις επόμενες εικόνες φαίνεται ο πολλαπλασιασμός με πλακίδια και αριθμητική γραμμή των γινομένων (α) $-3 \cdot 2$ και (β) $-2 \cdot 3$.



- ✓ Να περιγράψετε τον τρόπο υπολογισμού των γινομένων αυτών τόσο με τα πλακίδια όσο και με την αριθμητική γραμμή. Εξηγήστε τη διαγραφή των θετικών πλακιδίων.
 - ✓ Να γράψετε αντίστοιχα αθροίσματα για καθένα από τα γινόμενα αυτά.
 - ✓ Να σχεδιάσετε πλακίδια, για να δείξετε το γινόμενο, $-3 \cdot 4$. Επιβεβαιώστε την απάντησή σας με τη χρήση υπολογιστικής αριθμομηχανής.
4. Στις επόμενες εικόνες φαίνεται το γινόμενο $-2 \cdot (-3)$, υπολογισμένο με πλακίδια και με αριθμητική γραμμή.



- ✓ Να περιγράψετε τον τρόπο υπολογισμού των γινομένων αυτών τόσο με τα πλακίδια όσο και με την αριθμητική γραμμή. Εξηγήστε τη διαγραφή των αρνητικών πλακιδίων.
- ✓ Να γράψετε αντίστοιχα αθροίσματα για καθένα από τα γινόμενα αυτά.
- ✓ Να σχεδιάσετε πλακίδια για να δείξετε το γινόμενο, $-5 \cdot (-4)$. Επιβεβαιώστε την απάντησή σας με τη χρήση υπολογιστικής αριθμομηχανής.



5. **Τεχνολογία:** Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «Integer_multiplication.ggb» για να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$$(\alpha) -2 \cdot 3$$

$$(\gamma) -1 \cdot 4$$

$$(\epsilon) 3 \cdot (-3)$$

$$(\zeta) 2 \cdot (-4)$$

$$(\theta) 0 \cdot (-3)$$

$$(\beta) -2 \cdot (-3)$$

$$(\delta) -1 \cdot (-4)$$

$$(\sigma\tau) -3 \cdot (-3)$$

$$(\eta) -2 \cdot (-4)$$

$$(\iota) -1 \cdot (0)$$

- ✓ Να διατυπώσετε ένα γενικό κανόνα για το γινόμενο *ομόσημων* και *ετερόσημων* ακέραιων αριθμών.

Τι πρέπει να ξέρετε

- Το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ μπορεί να θεωρηθεί ως επαναλαμβανόμενη
 - Πρόσθεση θετικών, αν $\alpha > 0$
 - Πρόσθεση αρνητικών, αν $\alpha < 0$
- Το γινόμενο δυο ομόσημων ακέραιων αριθμών είναι θετικός αριθμός
- Το γινόμενο δυο ετερόσημων ακέραιων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός
- Ο ακόλουθος πίνακας συνοψίζει τη συμπεριφορά των προσήμων στον πολλαπλασιασμό:

•	+	-
+	+	-
-	-	+

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Να εκφράσετε σε μορφή αθροισμάτων και να υπολογίσετε τα γινόμενα:
 $(\alpha) 3 \cdot 5$ $(\beta) 3 \cdot (-5)$ $(\gamma) -3 \cdot 5$ και $(\delta) -3 \cdot (-5)$

Λύση:

$$(\alpha) 3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 = 15, \text{ επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.}$$

$$(\beta) 3 \cdot (-5) = -5 + (-5) + (-5) = -15, \text{ επαναλαμβανόμενη πρόσθεση}$$

$$(\gamma) -3 \cdot 5 = 0 - (+5) - (+5) - (+5) = -15, \text{ επαναλαμβανόμενη πρόσθεση αρνητικών}$$

$$(\delta) -3 \cdot (-5) = 0 - (-5) - (-5) - (-5) = +15, \text{ επαναλαμβανόμενη πρόσθεση αρνητικών}$$

- Να βρείτε τα γινόμενα:

$$(\alpha) 4 \cdot (-2) \quad (\beta) -8 \cdot 3 \quad (\gamma) 4 \cdot 9 \quad \text{και} \quad (\delta) -7 \cdot (-5)$$

Λύση:

$$(\alpha) 4 \cdot (-2) =$$

$$-(4 \cdot 2) = -8 \quad \text{Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Το γινόμενο είναι αρνητικό.}$$

$$(\beta) -8 \cdot 3 =$$

$$-(8 \cdot 3) = -24 \quad \text{Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Το γινόμενο είναι αρνητικό.}$$

$$(\gamma) 4 \cdot 9 = 36$$

Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Το γινόμενο είναι θετικό.

$$(\delta) -7 \cdot (-5) =$$

$$+(7 \cdot 5) = 35 \quad \text{Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Το γινόμενο είναι θετικό.}$$

1. Να υπολογίσετε τα επόμενα γινόμενα:

$$(\alpha) (-7) \cdot 2$$

$$(\beta) (-4) \cdot 8$$

$$(\gamma) (-2) \cdot (-5)$$

$$(\delta) (-6) \cdot (-3)$$

$$(\epsilon) (-3) \cdot 7$$

$$(\sigma\tau) (-10) \cdot (-4)$$

$$(\zeta) 8 \cdot 4$$

$$(\eta) 3 \cdot (-6)$$

$$(\theta) (-7) \cdot (-3)$$

$$(\iota) (-4) \cdot (-5)$$

$$(\iota\alpha) (-7) \cdot 0$$

$$(\iota\beta) 8 \cdot (-6)$$

2. Να αποφασίσετε κατά πόσο οι επόμενες προτάσεις είναι πάντοτε, κάποτε ή ποτέ αληθείς. Εξηγήστε και δώστε παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα σε κάθε περίπτωση.

(α) Το γινόμενο δυο θετικών ακεραίων είναι αρνητικό.

(β) Ένας αρνητικός ακέραιος πολλαπλασιαζόμενος με έναν αρνητικό ακέραιο δίνει θετικό ακέραιο αριθμό.

(γ) Το γινόμενο τριών αρνητικών ακεραίων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

3. Να γράψετε τους τρεις επόμενους όρους των ακολουθιών:

$$(\alpha) 1, -2, 4, -8, 16 \dots$$

$$(\beta) -1, 2, -4, 8, -16 \dots$$

$$(\gamma) 1, -10, 100, -1000, \dots$$

$$(\delta) 1, -3, 9, -27, \dots$$

Για κάθε ακολουθία διατυπώστε τον κανόνα που χρησιμοποιείτε για τον υπολογισμό του επόμενου όρου.

4. Να βρείτε τη τιμή των παραστάσεων:

$$(\alpha) 3 \cdot (-6 + 8)$$

$$(\beta) -3 + 6 \cdot (7 - 12)$$

$$(\gamma) 6 - (5 + 4)$$

$$(\delta) 6 \cdot (-2 + 8)$$

$$(\epsilon) -2 \cdot (-6 + 10) - 15$$

$$(\sigma\tau) 3 \cdot (-6) + 3 \cdot 8$$

$$(\zeta) 5 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot 21$$

$$(\eta) -20^2 + (-1)^3$$

5. Αν $\alpha = -5$ και $\beta = -8$ να βρείτε τη τιμή των παραστάσεων:

(α) $A = 4\alpha + 9$

(β) $B = 3\beta - \alpha^2$

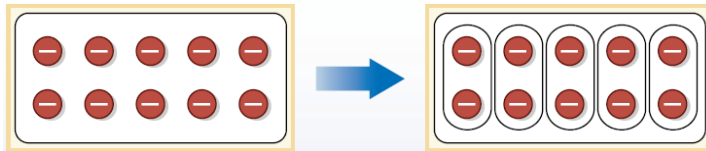
(γ) $\Gamma = \alpha\beta - \beta^2$

(δ) $\Delta = -2[2\beta - 3(\alpha - \beta)]$

Διαίρεση Ακεραίων

Διερεύνηση

1. Ένας μαθητής μοντελοποιεί το πηλίκο $-10 \div 5$, χρησιμοποιώντας πλακίδια. Το μοντέλο του έχει την επόμενη εικόνα.



- ✓ Να περιγράψετε τον τρόπο που εργάστηκε ο μαθητής αυτός.
- ✓ Να χρησιμοποιήσετε πλακίδια για να υπολογίσετε τα πηλικά, (α) $-6 \div 2$ και (β) $-12 \div 3$.

2. Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα πολλαπλασιασμού και αντίστοιχης διαίρεσης:

Πολλαπλασιασμός	Αντίστοιχη Διαίρεση	
$4 \cdot 3 = 12$	$12 \div 3 = 4$	$12 \div 4 = 3$
$-4 \cdot 3 = -12$	$-12 \div 3 = -4$	$-12 \div (-4) = 3$
$4 \cdot (-3) = -12$		
$-4 \cdot (-3) = 12$		

- ✓ Να διατυπώσετε έναν κανόνα για τα πρόσημα στη διαίρεση ακεραίων αριθμών.

Τι πρέπει να ξέρετε

- Το πηλίκο δυο ομόσημων ακεραίων αριθμών είναι θετικό
- Το πηλίκο δυο ετερόσημων ακεραίων αριθμών είναι αρνητικό.
- Το πηλίκο και το γινόμενο ακολουθούν τους ίδιους κανόνες σε ότι αφορά στο πρόσημο.

÷	+	-
+	+	-
-	-	+

$(+) \div (+) = (+)$
$(-) \div (-) = (+)$
$(+) \div (-) = (-)$
$(-) \div (+) = (-)$

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

$$(α) -36 \div 9 \quad (β) 80 \div (-20) \quad (γ) -24 \div (-3) \quad (δ) \frac{-55}{11} \quad (ε) \frac{-28}{-7}$$

Λύση:

$$(α) -36 \div 9 = -(36 \div 9) = -4 \quad \text{οι αριθμοί είναι ετερόσημοι.}$$

$$(β) 80 \div (-20) = -(80 \div 20) = -4 \quad \text{οι αριθμοί είναι ετερόσημοι.}$$

$$(γ) -24 \div (-3) = +(24 \div 3) = 8 \quad \text{οι αριθμοί είναι ομόσημοι.}$$

$$(δ) \frac{-55}{11} = -\frac{55}{11} = -5 \quad \text{οι αριθμοί είναι ετερόσημοι.}$$

$$(ε) \frac{-28}{-7} = \frac{28}{7} = 4 \quad \text{οι αριθμοί είναι ομόσημοι.}$$

- Από στοιχεία της NASA φαίνεται ότι η μέση θερμοκρασία στην επιφάνεια του Άρη είναι -85°F . Χρησιμοποιήστε τον τύπο,

$$C = \frac{5(F-32)}{9},$$

για να βρείτε τη θερμοκρασία του Άρη σε βαθμούς Κελσίου.

Λύση:

$$C = \frac{5(F-32)}{9} = \frac{5(-85-32)}{9} \quad \text{Αντικαθιστούμε το } F \text{ με } -85,$$

$$= \frac{5(-117)}{9} \quad \text{Αφαιρούμε το } -32 \text{ από το } -85,$$

$$= \frac{-585}{9} \quad \text{Πολλαπλασιάζουμε 5 επί } -113$$

$$\approx -65 \quad \text{Διαιρούμε τους δυο ετερόσημους αριθμούς.}$$

1. Να υπολογίσετε τα επόμενα πηλίκα:

$$(α) (-10) \div (-2) \quad (β) (-15) \div 5 \quad (γ) (18) \div (-3)$$

$$(δ) (14) \div (-7) \quad (ε) (-21) \div (-3) \quad (στ) (-45) \div 9$$

$$(ζ) 50 \div (-5) \quad (η) (-100) \div (-4) \quad (θ) 80 \div (-2)$$

$$(ι) 26 \div (-13) \quad (ια) (-70) \div (-7) \quad (ιβ) (-42) \div 7$$

2. Να υπολογίσετε την τιμή των ακόλουθων παραστάσεων, όταν $\alpha = 12$, $\beta = -4$ και $\gamma = -6$.

(α) $-12 \div \alpha$ (β) $72 \div \gamma$ (γ) $\alpha \div \beta$

(δ) $\alpha \cdot \beta \div 16$ (ε) $(-21) \div (-3)$ (στ) $\frac{-\alpha}{\gamma}$

(ζ) $\frac{16 - (-\alpha)}{-\beta}$ (η) $\gamma^2 \div \alpha$ (θ) $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$

3. Ο ακόλουθος πίνακας παρουσιάζει τη μέση θερμοκρασία στην Ανταρκτική κατά τους μήνες Ιούλιο μέχρι Δεκέμβριο. Να υπολογίσετε τη μέση θερμοκρασία της χρονικής αυτής περιόδου στην Ανταρκτική.

Μήνας	Ιούλιος	Αύγουστος	Σεπτέμβριος	Οκτώβριος	Νοέμβριος	Δεκέμβριος
Θερμοκρασία	-41	-50	-49	-43	-40	-29

4. Να βρείτε τους τρεις επόμενους όρους της ακολουθίας $729, -243, 81, -27, \dots$.
Να εξηγήσετε πως εργαστήκατε.
5. Μια αποικία βακτηρίων διπλασιάζεται κάθε 12 ώρες. Αν ύστερα από τρεις ημέρες η αποικία αριθμεί 1600 βακτήρια, ποιος ήταν ο αρχικός πληθυσμός της αποικίας;
6. Να βρείτε όλους τους διαιρέτες του -20 .

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(-6) \cdot (-3) + (-4)$ (β) $(-5) \cdot 4 - (-3)$

(γ) $-8 \cdot (-7) - 8 \cdot 7$ (δ) $-11 \cdot 4 + (-8) \cdot (-3)$

2. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(-6 + 10) \div (-2)$ (β) $(12 - 24) \div (-3)$

(γ) $(6 + (-8)) \cdot (4 - 7)$ (δ) $((-2) + 8) \cdot ((-4) + 2)$

(ε) $((-4) \cdot 2) + (6 \cdot (-9))$ (στ) $(8 \cdot (-2)) - ((-4) \cdot 8)$

3. Να κάνετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε το αποτέλεσμα.

(α) $\frac{(-3) \cdot (-4)}{-2}$ (β) $\frac{5 \cdot (-6)}{-3}$

$$(\gamma) \frac{(-7) \cdot (-5) \cdot (-2)}{5}$$

$$(\delta) \frac{8 \cdot (-9) \cdot 6}{(-2) \cdot (-3)}$$

$$(\epsilon) \frac{(-6) \cdot (-4)}{2}$$

$$(\sigma\tau) \frac{(-4) \cdot (-7) \cdot 3}{(-12)}$$

4. Αν $\alpha = 12$, $\beta = -4$ και $\gamma = -8$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$(\alpha) \frac{6\gamma}{\alpha} - \beta$$

$$(\beta) \frac{-96}{\beta - \alpha} + \gamma$$

$$(\gamma) -\gamma^2 - 25$$

$$(\delta) \alpha \cdot \beta \div 16$$

$$(\epsilon) (3\beta + 2)^2 \div (-4)$$

$$(\sigma\tau) \frac{-\alpha}{\beta \cdot \gamma}$$

5. Να κάνετε δυο αντίγραφα του επόμενου πίνακα πολλαπλασιασμού. Να συμπληρώσετε τον κάθε πίνακα με διαφορετικό τρόπο.

.				
	1			
		4		
			9	
				25

6. Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ.

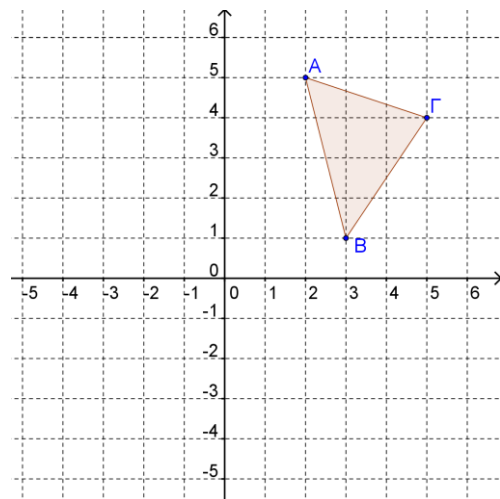
(α) Να βρείτε τα διατεταγμένα ζεύγη, που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου.

(β) Να πολλαπλασιάσετε τόσο την τετμημένη όσο και την τεταγμένη της κάθε κορυφής του ΑΒΓ με -1 και να ονομάσετε τα νέα διατεταγμένα ζεύγη που θα προκύψουν, A' , B' και Γ' , αντίστοιχα.

(γ) Να τοποθετήσετε τα νέα σημεία A' , B' και Γ' στο σύστημα συντεταγμένων. Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$;

(δ) Ποια είναι η σχέση του αρχικού τριγώνου ΑΒΓ με το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$;

(ε) Να πολλαπλασιάσετε με -2 μόνο την τεταγμένη της κάθε κορυφής του ΑΒΓ. Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το νέο τρίγωνο που παράγεται;



7. Να γράψετε ένα πρόβλημα που συναντήσατε στη ζωή σας σχετικά με τους αρνητικούς και τους θετικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε από τις τέσσερις πράξεις. Στη συνέχεια να λύσετε το πρόβλημα.