

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Γυμνασίου

Ενότητα 1



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Α΄ Γυμνασίου
Ενότητα 1

Συγγραφή:

Ομάδα Υποστήριξης Μαθηματικών

Συντονισμός έκδοσης:

Χρίστος Παρπούνας, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Έκδοση 2011

ISBN 978-9963-0-4571-6

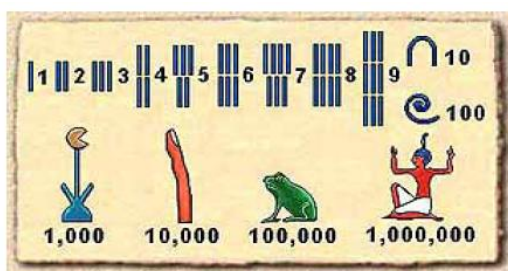
**© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ**

ΑΡΙΘΜΟΙ

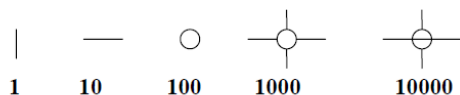
Αξία Θέσης Ψηφίου Φυσικών Αριθμών- Στρογγυλοποίηση

Εξερεύνηση

Κάθε λαός στην αρχαιότητα χρησιμοποιούσε δικά του σύμβολα, για να αναπαριστάνει ποσότητες. Το πρώτο από τα πιο κάτω συστήματα είναι το αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης και το δεύτερο είναι το σύστημα που χρησιμοποιείται από τους Έλληνες γύρω στο 1300 π.Χ.



Ιερογλυφικά Αριθμητικά σύμβολα



Αριθμητικό Σύστημα στη Γραμμική Β΄.

- ✓ Να γράψετε τον αριθμό δεκατρία με το αιγυπτιακό και με το αριθμητικό σύστημα στη Γραμμική Β. Μπορείτε να γράψετε τον αριθμό δεκατρία με περισσότερους από έναν τρόπους; Να δοκιμάσετε και με άλλους αριθμούς
- ✓ Ποια η διαφορά των πιο πάνω αριθμητικών συστημάτων από το δικό μας δεκαδικό σύστημα γραφής των αριθμών;

Διερεύνηση

1. Χρησιμοποιώντας τα πιο κάτω ψηφία (μια μόνο φορά το καθένα) , να βρείτε



- (α) το μεγαλύτερο αριθμό που μπορεί να σχηματιστεί,
 - (β) το μικρότερο αριθμό που μπορεί να σχηματιστεί,
- όταν χρησιμοποιήσετε,

- (i) τρία από τα ψηφία,
- (ii) τέσσερα από τα ψηφία,
- (iii) όλα τα ψηφία.

2. Να επαναλάβετε το πρόβλημα, χρησιμοποιώντας τα πιο κάτω ψηφία:

0
4
5
5
6

3. Τέσσερις αθλητικογράφοι ανέφεραν τον αριθμό των θεατών του Ευρωπαϊκού πρωταθλήματος ποδοσφαίρου 2008 (Euro 2008) μεταξύ της Ισπανίας και της Γερμανίας, δίνοντας τέσσερις διαφορετικούς αριθμούς, όπως φαίνονται στον πίνακα .

	Αρ. Θεατών στο στάδιο
1	51000
2	51430
3	51400
4	50000



- (α) Να εξηγήσετε πώς είναι δυνατόν όλοι οι ανταποκριτές να είναι ορθοί.
- (β) Ποιος θα μπορούσε να είναι ο πραγματικός αριθμός των θεατών;
- (γ) Σε ποιο ψηφίο κάθε αθλητικογράφος έχει στρογγυλοποιήσει τον αριθμό των θεατών;

Τι πρέπει να ξέρετε

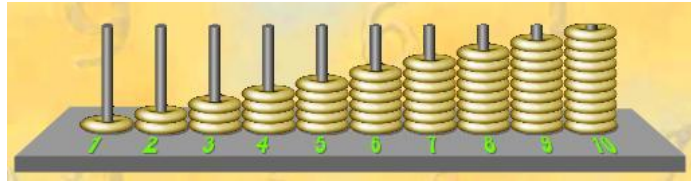
- Η θέση κάθε ψηφίου σε έναν αριθμό ορίζει την αξία που έχει το ψηφίο. Ο επόμενος πίνακας δείχνει την αξία θέσης κάθε ψηφίου του αριθμού 572 640 834 190.

Χιλιάδες Εκατομμύρια			Εκατομμύρια			Χιλιάδες					
Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
5	7	2	6	4	0	8	3	4	1	9	0

Ο αριθμός διαβάζεται:

«Πεντακόσιες εβδομήντα δύο χιλιάδες εκατομμύρια, εξακόσια σαράντα εκατομμύρια, οκτακόσιες τριάντα τέσσερις χιλιάδες, εκατόν ενενήντα»

- Το σύνολο των αριθμών που αντιστοιχεί στη μέτρηση φυσικών αντικειμένων είναι οι **φυσικοί αριθμοί**. Ο μικρότερος φυσικός αριθμός είναι το 1 και κάθε επόμενος φυσικός αριθμός είναι αυξημένος κατά μια μονάδα από τον προηγούμενό του. Το σύνολο των φυσικών αριθμών συμβολίζεται με το $\mathbb{N}$.



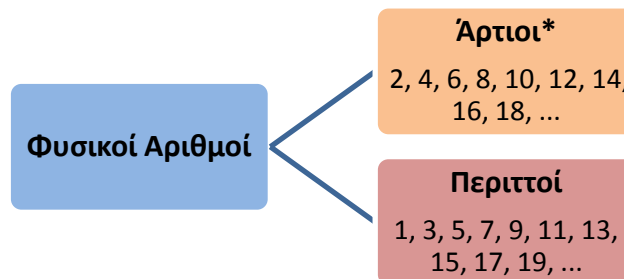
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Οι φυσικοί αριθμοί

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Οι φυσικοί αριθμοί με το μηδέν

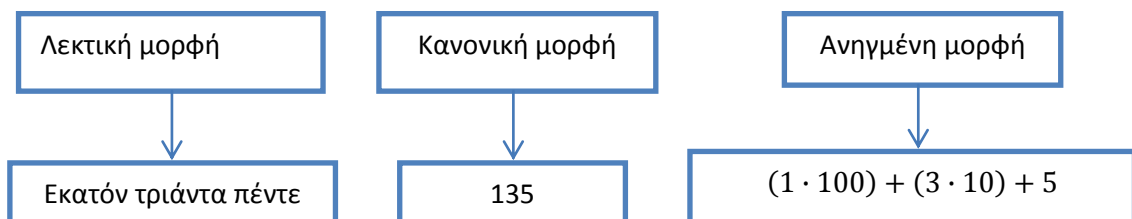
- Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται στους άρτιους και στους περιττούς.



* **Άρτιοι** είναι οι αριθμοί που το ψηφίο των μονάδων τους είναι 0, 2, 4, 6, 8.

Περιττοί είναι οι αριθμοί που το ψηφίο των μονάδων τους είναι 1, 3, 5, 7, 9.

- Λεκτική** μορφή είναι η αναγραφή με λέξεις ενός αριθμού.
Κανονική μορφή είναι η ψηφιακή αναγραφή ενός αριθμού.
Ανηγγμένη μορφή είναι ένα άθροισμα γινομένων κάθε ψηφίου με την αξία θέσης του ψηφίου.



Σύμβαση: Το 5 στρογγυλοποιείται προς τα πάνω στην επόμενη δεκάδα, το 50 στρογγυλοποιείται στην επόμενη εκατοντάδα, το 500 στην επόμενη χιλιάδα και ούτω καθεξής.

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 5746 στην πλησιέστερη:
(α) δεκάδα, (β) εκατοντάδα, (γ) χιλιάδα.

Λύση:

- (α) Αφού το $6 > 5$ τότε $5746 \approx 5750$ στην πλησιέστερη δεκάδα.
(β) Αφού το $46 < 50$ τότε $5746 \approx 5700$ στην πλησιέστερη εκατοντάδα
(γ) Αφού το $746 > 500$ τότε $5746 \approx 6000$ στην πλησιέστερη χιλιάδα
(Το σύμβολο $\approx$ συμβολίζει ισότητα κατά προσέγγιση)

- Να γράψετε σε **ανηγμένη** μορφή τους αριθμούς:

(α) 36 (β) 125 (γ) 1001 (δ) 2050024

Λύση:

- (α) $36 = 30 \cdot 10 + 6$
(β) $125 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$
(γ) $1001 = 1 \cdot 1000 + 1$
(δ) $2050024 = 2 \cdot 1000000 + 5 \cdot 10000 + 2 \cdot 10 + 4$

- Να γράψετε σε λεκτική μορφή τους αριθμούς:

(α) 38752 (β) 4224 (γ) 2003 011 (δ) 13335429802

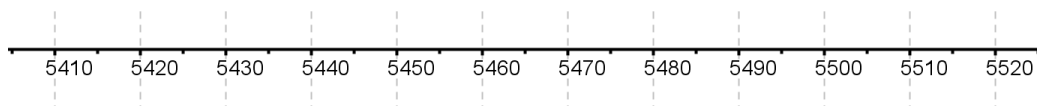
- Να γράψετε σε κανονική μορφή τους αριθμούς:

- (α) Εικοσιτέσσερα
(β) Εκατόν δυο
(γ) Ογδόντα δύο χιλιάδες πέντε
(δ) Τρία εκατομμύρια, τετρακόσιες χιλιάδες
(ε) Σαράντα πέντε χιλιάδες εκατομμύρια, εξήντα εκατομμύρια, επτά.
(στ) Πέντε δισεκατομμύρια, εκατόν δύο χιλιάδες εκατομμύρια, δεκαεπτά εκατομμύρια, οκτακόσιες τρεις χιλιάδες, πεντακόσια ένα.

- Να ονομάσετε κάθε μη μηδενικό ψηφίο των επόμενων αριθμών σύμφωνα με την αξία της θέσης του.

(α) 850 (β) 695 (γ) 90016 (δ) 40200050

- (α) Να τοποθετήσετε τον αριθμό 5486 στην αριθμητική γραμμή.



- Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 7396 στην:

- (i) πλησιέστερη δεκάδα
(ii) πλησιέστερη εκατοντάδα
(iii) πλησιέστερη χιλιάδα

6. Ο Διευθυντής του σχολείου ανακοινώνει ότι στην Α΄ τάξη του σχολείου φοιτούν 120 μαθητές/τριες. Αν έχει στρογγυλοποιήσει τον αριθμό αυτό στην πλησιέστερη δεκάδα, πόσοι μαθητές/τριες θα μπορούσαν να φοιτούν στην Α΄ τάξη; Να αναφέρετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.
7. Μια εφημερίδα ανακοίνωσε ότι την περασμένη εβδομάδα πώλησε 42000 φύλλα. Ο ακριβής αριθμός στρογγυλοποιήθηκε στην πλησιέστερη χιλιάδα.
 - (α) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός των φύλλων της εφημερίδας που πωλήθηκαν;
 - (β) Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός των φύλλων της εφημερίδας που πωλήθηκαν;
8. Ο αριθμός των παραπόνων που έλαβε διεθνής εταιρείας μεταφορών πριν από δυο χρόνια ήταν 2500, στρογγυλοποιημένος στην πλησιέστερη εκατοντάδα. Πέρυσι, η εταιρεία ανακοίνωσε ότι ο αριθμός των παραπόνων ήταν 2000, στρογγυλοποιημένος στην πλησιέστερη χιλιάδα. Η εταιρεία ανακοίνωσε ότι τα παράπονα μειώθηκαν. Είναι δικαιολογημένη η ανακοίνωση της εταιρείας;
9. Ένας τριψήφιος αριθμός αυξάνει κατά 9, αν ανταλλάξουν θέση το δεύτερο και τρίτο ψηφίο του. Ο ίδιος αριθμός αυξάνει κατά 90, αν ανταλλάξουν θέση το πρώτο και το δεύτερο ψηφίο του. Πόσο θα αυξηθεί ο αριθμός, αν ανταλλάξουν θέση το πρώτο και τρίτο ψηφίο του;

Δεκαδικοί – Αξία θέσης ψηφίου – Στρογγυλοποίηση

Διερεύνηση

1. Χρησιμοποιώντας τα ψηφία (μια μόνο φορά το καθένα) , να βρείτε

1	3	6	7	9	,
---	---	---	---	---	---

- (α) το μεγαλύτερο αριθμό που μπορεί να σχηματιστεί,
- (β) το μικρότερο αριθμό που μπορεί να σχηματιστεί, όταν χρησιμοποιήσετε το σημείο της υποδιαστολής με:
 - (i) τρία από τα ψηφία,
 - (ii) τέσσερα από τα ψηφία,
 - (iii) όλα τα ψηφία.

2. Να επαναλάβετε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τα ψηφία.

0	4	5	5	6	,
---	---	---	---	---	---

3. Το παγκόσμιο ρεκόρ στο τριπλούν καταγράφηκε από τέσσερις αθλητικές εφημερίδες ως εξής:

	Παγκόσμιο Ρεκόρ
1	18,29
2	18
3	18,3
4	18,291



- (α) Είναι δυνατό όλες οι εφημερίδες να έχουν καταγράψει ορθά το παγκόσμιο ρεκόρ στο τριπλούν;
 (β) Ποιες θα μπορούσαν να είναι οι τιμές του παγκόσμιου ρεκόρ στρογγυλεμένες σε ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων;

Τι πρέπει να ξέρετε

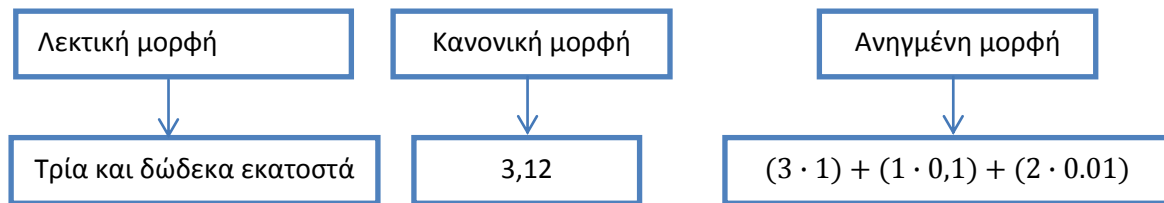
- Η αξία της θέσης που έχουν τα ψηφία ενός δεκαδικού αριθμού πριν από την υποδιαστολή είναι διαφορετική από την αξία των ψηφίων μετά την υποδιαστολή. Τα ψηφία πριν από την υποδιαστολή αποτελούν το **ακέραιο μέρος** του αριθμού, ενώ τα ψηφία μετά την υποδιαστολή αποτελούν το **δεκαδικό μέρος** του αριθμού. Ο επόμενος πίνακας δείχνει την αξία θέσης κάθε ψηφίου του αριθμού 12 568,325 84.

Εκατοντάδες χιλιάδες	Δεκάδες Χιλιάδες	Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Υποδιαστολή	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά	Δεκάκις χιλιοστά	Εκατοντάκις χιλιοστά	Εκατομμυριοστά	Δεκάκις Εκατομμυριοστά	Εκατοντάκις Εκατομμυριοστά
	1	2	5	6	8	,	3	2	5	8	4			
Ακέραιο Μέρος							Δεκαδικό Μέρος							

Ο αριθμός διαβάζεται:

«Δώδεκα χιλιάδες, πεντακόσια εξήντα οκτώ και τριάντα δύο χιλιάδες, πεντακόσια ογδόντα τέσσερα εκατοντάκις χιλιοστά.»

- **Λεκτική, κανονική και ανηγμένη μορφή δεκαδικού αριθμού**



Για να στρογγυλοποιήσουμε ένα δεκαδικό αριθμό σε μια συγκεκριμένη δεκαδική τάξη, ακολουθούμε τον επόμενο κανόνα:

- Αν το ψηφίο της επόμενης δεκαδικής τάξης είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5, τότε η δεκαδική τάξη στην οποία στρογγυλοποιείται ο αριθμός αυξάνει κατά μία μονάδα και όλα τα επόμενα δεκαδικά ψηφία μηδενίζονται.
- Αν το ψηφίο της επόμενης δεκαδικής τάξης είναι μικρότερο του 5, τότε η δεκαδική τάξη στην οποία στρογγυλοποιείται ο αριθμός παραμένει ως έχει και όλα τα επόμενα δεκαδικά ψηφία μηδενίζονται.

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Να γράψετε τον αριθμό 35,376 σε λεκτική μορφή.

Λύση:

1000	100	10	1		0,1	0,01	0,001	0,0001
Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες		Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά	Δεκάκις-χιλιοστά
		3	5	,	3	7	6	
Τριάντα πέντε					Τριακόσια εβδομήντα έξι χιλιοστά			

Δηλαδή το 35,376 γράφεται: «τριάντα πέντε και τριακόσια εβδομήντα έξι χιλιοστά»

- Να γράψετε τον αριθμό «πενήντα οκτώ και έξι δεκάκις-χιλιοστά»
(α) σε κανονική
(β) σε ανηγμένη μορφή.

Λύση:

Κανονική μορφή: 58,0006

Ανηγμένη μορφή: $(5 \cdot 10) + (8 \cdot 1) + (6 \cdot 0,0001)$

- Να στρογγυλοποιήσετε τους επόμενους αριθμούς στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο

(α) 1,47 (β) 3,23 (γ) 0,45 (δ) 5,005

Λύση:

(α) 1,5 (β) 3,2 (γ) 0,5 (δ) 5,0

- Να στρογγυλοποιήσετε τους επόμενους αριθμούς στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο

(α) 3,444 (β) 8,555 (γ) 0,321 (δ) 0,3002

Λύση:

(α) 3,44 (β) 8,56 (γ) 0,32 (δ) 0,30

1. Να γράψετε τους ακόλουθους αριθμούς σε λεκτική μορφή:

(α) 6,78 (β) 8,0303 (γ) 230,01234532 (δ) 0,0023

2. Να γράψετε την αξία του ψηφίου 3 στους επόμενους αριθμούς:

(α) 24,7643 (β) 9,123 (γ) 76,0314212 (δ) 1,0278023

3. Να γράψετε σε κανονική μορφή τους αριθμούς:

- i. Τρία και επτά δέκατα
- ii. Δύο, και τριάντα οκτώ εκατοστά
- iii. Πέντε και τέσσερα χιλιοστά
- iv. Δύο χιλιάδες, πεντακόσια δεκατέσσερα δεκάκις χιλιοστά.
- v. Σαράντα πέντε εκατοντάκις χιλιοστά.

4. Να γράψετε τους ακόλουθους αριθμούς με ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων:

(α) 3,687 (β) 4,995 (γ) 12,104 (δ) 4,046

5. Ποιοι δεκαδικοί αριθμοί με δυο δεκαδικά ψηφία βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς, 4,174 και 4,189;

6. Δίνεται στον Παύλο ένας αριθμός στρογγυλεμένος σε τρία δεκαδικά ψηφία. Ο Παύλος στρογγυλεύει τον αριθμό που του έδωσαν σε δυο δεκαδικά και γράφει τον

αριθμό 5,81. Να γράψετε όλους τους δυνατούς αριθμούς που θα μπορούσαν να δοθούν στο Πάυλο.

7. Στα σωματομετρικά στοιχεία που σημειώνει ο γυμναστής μιας ομάδας το ύψος ενός μαθητή αναφέρεται να είναι 1,54 m.
(α) Ποιο είναι το μικρότερο δυνατό ύψος του μαθητή;
(β) Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό ύψος του μαθητή;
8. Δίνονται τα ψηφία 3, 4, 0, 7 . Να χρησιμοποιήσετε μια μόνο φορά το κάθε ψηφίο για να γράψετε:
 - i. Το μεγαλύτερο δεκαδικό αριθμό που μπορεί να σχηματιστεί.
 - ii. Το μικρότερο δεκαδικό αριθμό που μπορεί να σχηματιστεί.
9. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι για να στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό 7,3412 σε ένα δεκαδικό ψηφίο θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε την ακόλουθη πορεία:

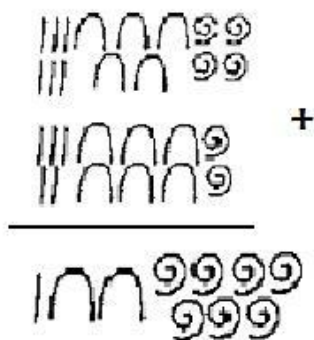
7,3412	→	7,341	→	7,34	→	7,3
		τρία		δύο		ένα
		δεκαδικά		δεκαδικά		δεκαδικό
		ψηφία		ψηφία		ψηφίο

Να εξετάσετε κατά πόσο η μέθοδος αυτή είναι πάντοτε ορθή.

Οι πράξεις των αριθμών

Εξερεύνηση

Πιο κάτω παρουσιάζεται το άθροισμα των αριθμών 456 και 265 στην ιερογλυφική γραφή. (Τα σύμβολα των Αιγυπτίων φαίνονται στην αρχή της ενότητας).



Να επεξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εκτελούσαν τον αλγόριθμο της πρόσθεσης οι αρχαίοι Αιγύπτιοι. Στη συνέχεια να συζητήσετε τρόπους με τους οποίους είναι δυνατό να εκτελούσαν την πράξη της αφαίρεσης και να υπολογίσετε στην ιερογλυφική γραφή τη διαφορά των 456 και 265.

Τι πρέπει να ξέρετε

Υπάρχουν τέσσερεις βασικές πράξεις:

Πρόσθεση	+	Για να βρούμε το άθροισμα
Αφαίρεση	—	Για να βρούμε τη διαφορά
Πολλαπλασιασμός	.	Για να βρούμε το γινόμενο
Διαίρεση	÷	Για να βρούμε το πηλίκο

Μερικοί βασικοί ορισμοί που χρησιμοποιούνται σε σχέση με τις πράξεις αυτές είναι οι ακόλουθοι:

• Αριθμητική Παράσταση	Μια σειρά από αριθμούς που συνδέονται με τα σύμβολα των πράξεων. Π.χ. $A = 2 \cdot 3 - 16 \div 8$, το A είναι μια αριθμητική παράσταση
• Τιμή Αριθμητικής Παράστασης	Ο αριθμός που βρίσκουμε, όταν εκτελέσουμε όλες τις πράξεις μιας αριθμητικής παράστασης. Π.χ. $B = 2 \cdot 3 - 16 \div 8 = 2$, Η τιμή της Αρ. παράστασης B είναι 2.
• Όροι	Οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται σε ένα άθροισμα ή μια διαφορά. Π.χ. $\alpha + \beta$, $\gamma - \delta$. Τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ λέγονται όροι της παράστασης.
• Προσθετέος	Ο αριθμός που προστίθεται σε κάποιον άλλο αριθμό. Π.χ. στο άθροισμα $\gamma = \alpha + \beta$, οι αριθμοί α και β είναι προσθετέοι όροι.
• Αφαιρετέος	Ο αριθμός που αφαιρείται από κάποιον άλλο. Π.χ. στη διαφορά $\gamma = \alpha - \beta$, ο αριθμός β είναι αφαιρετέος όρος.
• Μειωτέος	Ο αριθμός από τον οποίο αφαιρείται κάποιος άλλος αριθμός. Π.χ. στη διαφορά $\gamma = \alpha - \beta$, ο αριθμός α είναι μειωτέος όρος.
• Παράγοντες	Αριθμοί που πολλαπλασιάζονται, για να δώσουν ένα γινόμενο. Π.χ. $\alpha \cdot \beta = \gamma$, τα α και β είναι παράγοντες και το γ είναι το γινόμενο
• Διαιρέτης	Ο αριθμός που διαιρεί έναν άλλο αριθμό, για να δώσει ένα πηλίκο. Π.χ. $\alpha \div \beta = \gamma$, ο αριθμός β είναι διαιρέτης του αριθμού α .
• Διαιρετέος	Ο αριθμός που διαιρείται από κάποιον άλλο αριθμό. Π.χ. $\alpha \div \beta = \gamma$, ο αριθμός α είναι διαιρετέος αριθμός.

Διερεύνηση

1. Δύο μαθητές υπολογίζουν το γινόμενο $235 \cdot 37$ με δυο διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος τρόπος ακολουθεί τον κλασσικό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού. Στο δεύτερο τρόπο χρησιμοποιείται ο πίνακας που φαίνεται παρακάτω και στη συνέχεια υπολογίζεται το άθροισμα.

$$\begin{array}{r} 235 \\ 37 \times \\ \hline 1645 \\ 705 + \\ \hline 8695 \end{array}$$



×	200	30	5
30	6000	900	150
7	1400	210	35

$$\begin{array}{r} 6000 \\ 900 \\ 150 \\ 1400 \\ 210 \\ 35 + \\ \hline 8695 \end{array}$$

- Να επεξηγήσετε το δεύτερο τρόπο υπολογισμού του γινομένου;
 - Να αποδείξετε την ισοδυναμία των δυο τρόπων υπολογισμού του γινομένου δυο αριθμών.
 - Να βρείτε το γινόμενο $12,5 \cdot 4,2$, χρησιμοποιώντας τον κλασσικό αλγόριθμο και τη μέθοδο με τον πίνακα.
2. Παρακάτω παρουσιάζεται ο υπολογισμός του πηλίκου της διαίρεσης $105 \div 7$ με δυο τρόπους. Ο πρώτος είναι ο κλασσικός αλγόριθμος της διαίρεσης ενώ ο δεύτερος είναι γνωστός ως ο **Ευκλείδειος αλγόριθμος**.

$$\begin{array}{r} 105 \overline{) 7} \\ \underline{-7} \quad 15 \\ 35 \\ \underline{-35} \\ 0 \end{array}$$



$$\begin{aligned} 105 &= (7 \cdot 1 + 3) \text{ δεκάδες} + 5 \text{ μονάδες} \\ &= (7 \cdot 1) \text{ δεκάδες} + 35 \text{ μονάδες} \\ &= (7 \cdot 1) \text{ δεκάδες} + (7 \cdot 5) \text{ μονάδες} \end{aligned}$$

Επομένως,
 $105 \div 7 = 15$

- Να εξετάσετε την ισοδυναμία των δυο αλγορίθμων.
- Να βρείτε τα πηλικά,
 - $157,76 \div 4$
 - $2,17 \div 3,5$
 με χρήση (α) του κλασσικού αλγόριθμου και (β) του Ευκλείδειου αλγόριθμου.

Δραστηριότητες

1. Να περιγράψετε τα μοτίβα στις επόμενες ακολουθίες. Να βρείτε τους τρεις επόμενους όρους της κάθε ακολουθίας.

(α) $4,1, 4,7, 5,3, 5,9, \dots$

(β) $101, 119, 137, 155, \dots$

(γ) $3,42, 3,56, 3,70, 3,84, \dots$

2. Στους επόμενους υπολογισμούς κάποιοι αριθμοί λείπουν και σημειώνονται με (*). Να βρείτε τους αριθμούς που λείπουν.

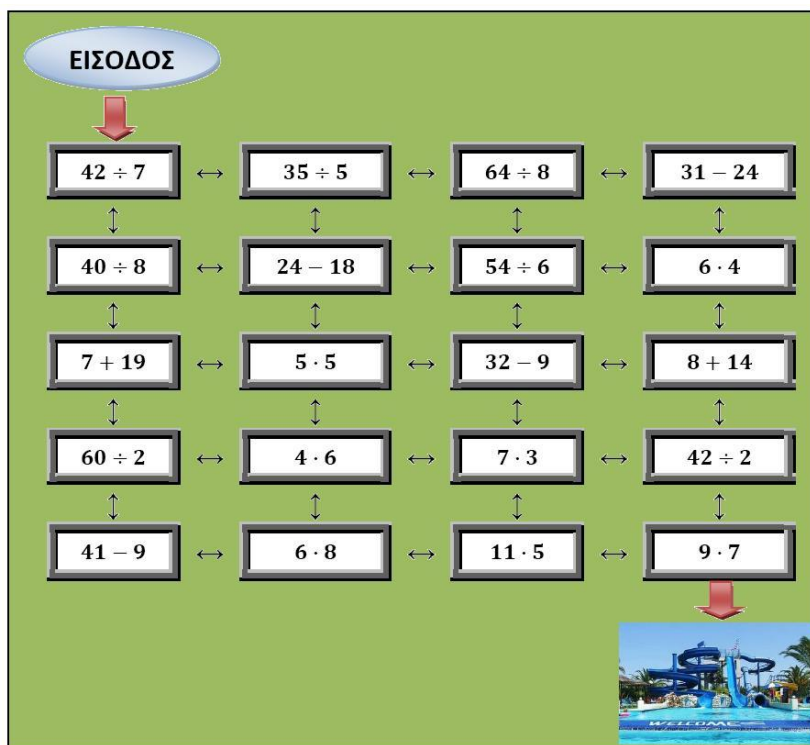
(α)
$$\begin{array}{r} 2 * 3 \\ 17 * + \\ \hline * 65 \end{array}$$

(β)
$$\begin{array}{r} 7 * 0 \\ 36 * - \\ \hline * 38 \end{array}$$

(γ)
$$\begin{array}{r} * 2 * \\ * 7 \times \\ \hline 8 * 9 \\ * * 4 * \\ * * * * \end{array}$$

(δ)
$$\begin{array}{r} * 1 * \overline{) 5} \\ 20 \quad * 3 \\ \hline * * \\ * * \end{array}$$

3. Να βρείτε την πορεία για το υδροπάρκο! Ξεκινήστε από την είσοδο, υπολογίζετε κάθε φορά το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο ή το πηλίκο. Στη συνέχεια να μεταβαίνετε στο πλαίσιο που έχει τη μεγαλύτερη τιμή, ακολουθώντας τα βέλη.



4. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

(α) $12 \cdot 15$	(β) $32 \cdot 21$	(γ) $89 \cdot 42$	(δ) $45 \cdot 57$
(ε) $62 \cdot 91$	(ζ) $112 \cdot 429$	(η) $3,6 \div 0,2$	(θ) $3,6 \div 0,2$

5. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

(α) $3,6 \div 0,2$	(β) $56 \div 0,4$	(γ) $83,7 \div 0,03$	(δ) $98,8 \div 0,26$
(ε) $3,6 \div 0,2$	(ζ) $3,6 \div 0,2$	(η) $3,6 \div 0,2$	(θ) $3,6 \div 0,2$

6. Με ποιον αριθμό θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί το 25, για να δώσει γινόμενο 1375;

7. Ποιον αριθμό θα πάρετε, αν ξεκινώντας από το 96 προσθέσετε 31 φορές τον αριθμό 8;

8. Η ενορία του Αγ. Νικολάου διοργανώνει ψυχαγωγική εκδρομή. Έχουν εκδηλώσει ενδιαφέρον 250 ενήλικες και 70 παιδιά. Κάθε λεωφορείο μπορεί να μεταφέρει 48 άτομα και κοστίζει €360. Στην εκδρομή θα προσφερθεί γεύμα, το κόστος του οποίου είναι €12 το άτομο. Το εισιτήριο για την εκδρομή είναι €13 για τους ενήλικες και €8 για τα παιδιά.

(α) Πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν;

(β) Με πόσα λεφτά θα πρέπει η ενορία να επιχορηγήσει την εκδρομή;

9. Η Ευγενία θέλει να φυλάξει χρήματα, για να αγοράσει πατίνια που κοστίζουν €250. Προσέχει μικρά παιδιά για έξι ώρες την εβδομάδα και αμείβεται με €2,75 την ώρα. Τα Σάββατα κάνει επιπρόσθετη εργασία από την οποία παίρνει €27,50. Κάθε εβδομάδα καταφέρνει να φυλάει τα τρία τέταρτα των εισοδημάτων της. Σε πόσες εβδομάδες θα καταφέρει να μαζέψει το ποσό που χρειάζεται, για να αγοράσει τα πατίνια;

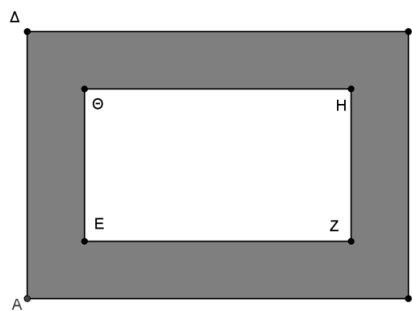
10. Το περιοδικό «ο κόσμος των σπορ» είναι μηνιαίο. Η αγορά του στα περίπτερα κοστίζει €2,45 ενώ η αγορά του με ετήσια συνδρομή κοστίζει €21. Πόσο φθηνότερο είναι ένα τεύχος του περιοδικού, όταν αγοράζεται με ετήσια συνδρομή;

11. Ποιός αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με τον αριθμό 37,25 δίνει γινόμενο 39,485; Η απάντηση να δοθεί σε προσέγγιση δεκάτου.

12. Εάν $x = 5$ και $y = 7$ στρογγυλεμένοι στην ακέραια μονάδα, να βρείτε τη μεγαλύτερη και μικρότερη δυνατή τιμή των παραστάσεων:

(α) $x + y$	(β) $y - x$	(γ) $x \cdot y$	(δ) $x \div y$
-------------	-------------	-----------------	----------------

13. Οι διαστάσεις των ορθογωνίων $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ δίνονται με ακρίβεια ακέραιας μονάδας. Να βρείτε το μέγιστο και ελάχιστο εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής, αν $AB = 10\text{ cm}$, $EZ = 7\text{ cm}$, $B\Gamma = 7\text{ cm}$ και $ZH = 4\text{ cm}$.



Εκτίμηση

Διερεύνηση

1. Ένας ποδηλάτης ξεκινά από τη γραμμή εκκίνησης, όπως φαίνεται στο χάρτη. Χρειάζεται 28 λεπτά μέχρι τη γέφυρα και 114 λεπτά από τη γέφυρα μέχρι τον καταρράκτη. Από τον καταρράκτη μέχρι τη γραμμή εκκίνησης χρειάζεται 208 λεπτά.

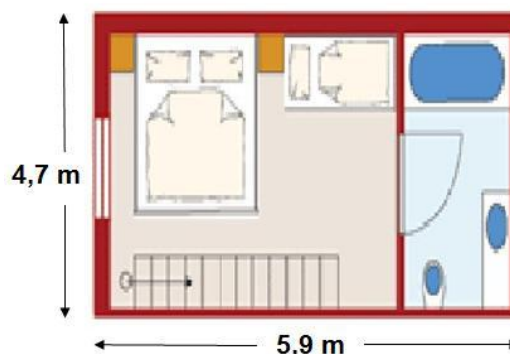
Ένας ποδηλάτης κάνει γρήγορους υπολογισμούς και εκτιμά τη διάρκεια της διαδρομής στα 128 λεπτά.

- ✓ Να δικαιολογήσετε την απάντηση του ποδηλάτη.
- ✓ Να δώσετε μια εκτίμηση της διάρκειας της διαδρομής με ακρίβεια μισής ώρας.



2. Ένας αρχιτέκτονας υπολογίζει το εμβαδόν του δωματίου που φαίνεται στο σχεδιάγραμμα. Πολλαπλασίασε το μήκος επί το πλάτος και προφανώς έκανε κάποιο λάθος, γιατί το αποτέλεσμα του υπολογισμού του ήταν $277,3 \text{ m}^2$. Ο εργολάβος αντιλαμβάνεται αμέσως το λάθος. Χωρίς να κάνει πράξεις εκτιμά ότι το εμβαδόν του δωματίου είναι περίπου 30 m^2 .

- ✓ Τι κατά τη γνώμη σας ήταν εκείνο που έκανε τον εργολάβο να υποψιαστεί το λάθος, πριν ακόμα κάνει οποιονδήποτε υπολογισμό;
- ✓ Με ποιο τρόπο εκτίμησε ο εργολάβος το εμβαδόν;



3. Να υπολογίσετε τα επόμενα γινόμενα και πηλίκια:

(α) $25 \cdot 10$ (β) $100 \cdot 40$ (γ) $400 \div 20$ (δ) $200 \div 50$
(ε) $2000 \cdot 0,3$ (στ) $1000 \cdot 0,2 =$ (ζ) $2500 \div 0,05$ (η) $350 \div 0,07$

- ✓ Να χρησιμοποιήσετε την υπολογιστική αριθμομηχανή, για να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις
- ✓ Να δώσετε ένα γενικό κανόνα για το γινόμενο και το πηλίκιο ενός αριθμού με πολλαπλάσια του 10, 100, 1000, ... και του 0,1, 0,01, 0,001, ...

Τι πρέπει να ξέρετε

- Μια γρήγορη εκτίμηση του αποτελέσματος μιας πράξης είναι ιδιαίτερης αξίας αφού συχνά μας αποτρέπει από του να δώσουμε εξωπραγματικές απαντήσεις στους υπολογισμούς μας.

Για να εκτιμήσουμε το αποτέλεσμα μιας πράξης:

- ✓ Στρογγυλεύουμε τους όρους ή παράγοντες της πράξης σε ένα δεκαδικό ψηφίο ή στην πλησιέστερη μονάδα ή δεκάδα κ.τ.λ., ανάλογα με τη φύση του προβλήματος.

Για παράδειγμα,

- i. $4,7 \cdot 5,9 \approx 5 \cdot 6 = 30$
- ii. $19,61 + 5,07 \approx 19,6 + 5,1 = 24,7$
- iii. $27,49 \div 3,12 \approx 27 \div 3 = 9$

- ✓ Στρογγυλεύουμε τους όρους ή παράγοντες της πράξης σε συμβατούς αριθμούς που διευκολύνουν την πράξη. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} 469 \div 59 &\approx 470 \div 60 && \text{(στρογγύλευμα στην πλησιέστερη δεκάδα)} \\ &\approx 480 \div 60 && \text{(αντικατάσταση του διαιρετέου με αριθμό} \\ &&& \text{πολλαπλάσιο του διαιρέτη)} \\ &= 8 \end{aligned}$$

- Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα **φυσικό αριθμό** με πολλαπλάσια του 10, 100, 1000, ... πολλαπλασιάζουμε τα ψηφία (εκτός από τα μηδενικά) των παραγόντων και στο γινόμενο προσθέτουμε τόσα μηδενικά όσα το **άθροισμα** των μηδενικών των δυο παραγόντων. Για παράδειγμα:

$$30 \cdot 120 = 3600$$

- Όταν διαιρούμε ένα **φυσικό αριθμό** με πολλαπλάσια του 10, 100, 1000, ... διαιρούμε τα ψηφία (εκτός από τα μηδενικά) των παραγόντων και στο πηλίκο προσθέτουμε τόσα μηδενικά όσα η **διαφορά** των μηδενικών των δυο παραγόντων. Για παράδειγμα:

$$2500 \div 50 = 250 \div 5 = 50$$

- Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα **δεκαδικό αριθμό** με πολλαπλάσια του 10, 100, 1000, ... πολλαπλασιάζουμε τα ψηφία (εκτός από τα μηδενικά) των παραγόντων και μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα **δεξιά** μία, δύο, τρεις, ... θέσεις αντίστοιχα. Για παράδειγμα:

$$200 \cdot 0,13 = 2 \cdot 13 = 26$$

- Όταν διαιρούμε ένα **δεκαδικό αριθμό** με πολλαπλάσια του 10, 100, 1000, ... διαιρούμε τα ψηφία (εκτός από τα μηδενικά) των παραγόντων και μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα **αριστερά** μία, δύο, τρεις, ... θέσεις αντίστοιχα. Για παράδειγμα:

$$0,24 \div 300 = 24 \div 30000 = 0,0008$$

- Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα **φυσικό αριθμό** με τα πολλαπλάσια του 0,1 , 0,01 , 0,001 , ... πολλαπλασιάζουμε τα ψηφία (εκτός από τα μηδενικά) των παραγόντων και στο γινόμενο προσθέτουμε τόσα μηδενικά όσα η **διαφορά** των μηδενικών των δυο παραγόντων. Για παράδειγμα:

$$0,4 \cdot 120 = 4 \cdot 12 = 48$$

- Όταν διαιρούμε ένα **φυσικό αριθμό** με τα πολλαπλάσια του 0,1 , 0,01 , 0,001 , ... διαιρούμε τα ψηφία (εκτός από τα μηδενικά) των παραγόντων και στο πηλίκο προσθέτουμε τόσα μηδενικά όσα το **άθροισμα** των μηδενικών των δυο παραγόντων. Για παράδειγμα:

$$200 \div 0,05 = 20000 \div 5 = 4000$$

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- (α) Να κάνετε μια εκτίμηση για την τιμή των παραστάσεων

$$(i) \quad A = (213 \cdot 69) \div 42 \quad \text{και} \quad (ii) \quad B = (78 \cdot 397) \div 0,38$$

(β) Να χρησιμοποιήσετε την υπολογιστική αριθμομηχανή σας, για να βρείτε την ακριβή τιμή των παραστάσεων και να στρογγυλοποιήσετε στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο.

Λύση:

(α)

$$\begin{aligned} (i) \quad A &= (213 \cdot 69) \div 42 \\ &\approx (200 \cdot 70) \div 40 \\ &= 14000 \div 40 \\ &= 350 \end{aligned}$$

Στρογγυλοποίηση των παραγόντων στην πλησιέστερη δεκάδα.

$$\begin{aligned} (ii) \quad B &= (78 \cdot 397) \div 0,38 \\ &\approx (80 \cdot 400) \div 0,4 \\ &= 32000 \div 0,4 \\ &= 320000 \div 4 \\ &= 80000 \end{aligned}$$

Στρογγυλοποίηση των φυσικών αριθμών στην πλησιέστερη δεκάδα και των δεκαδικών στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο

(β)

- (i) Να γράψετε στην αριθμομηχανή:

$$(\quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad \times \quad 6 \quad 9 \quad) \quad \div \quad 4 \quad 2 \quad =$$

Η οθόνη της αριθμομηχανής θα εμφανίσει τον αριθμό 349,9285714. Ο αριθμός αυτός στρογγυλοποιείται σε ένα δεκαδικό ψηφίο στον αριθμό 349,9

και στην πλησιέστερη μονάδα στον αριθμό 350 που συμφωνεί ακριβώς με την εκτίμηση.

- (ii) Για τον υπολογισμό της τιμής της δεύτερης παράστασης, να γράψετε στην αριθμομηχανή:

(7 8 × 3 9 7) ÷ 0 • 3 8 =

Η οθόνη θα εμφανίσει τον αριθμό 81489,47368. Ο αριθμός αυτός στρογγυλοποιείται σε ένα δεκαδικό ψηφίο στον αριθμό 81489,5. Σε ακρίβεια χιλιάδας ο αριθμός στρογγυλοποιείται στον αριθμό 81000 και σε ακρίβεια δέκα χιλιάδων στον αριθμό 80000, που είναι και η εκτίμηση.

1. Να υπολογίσετε τα γινόμενα και πηλίκα χωρίς τη χρήση υπολογιστικής αριθμομηχανής:

(α) $57 \cdot 100$	(β) $4,71 \cdot 10$	(γ) $8,2 \cdot 1000$	(δ) $230 \cdot 200$
(ε) $4,6 \cdot 1000$	(στ) $2200 \div 20$	(ζ) $0,3 \cdot 0,3$	(η) $300 \div 0,5$
(θ) $400 \div 0,2$	(ι) $0,2 \cdot 0,14$	(ια) $21 \div 0,7$	(ιβ) $240 \cdot 0,6$

2. Να δώσετε μια εκτίμηση για την τιμή των επόμενων παραστάσεων:

(α) $879 + 94$	(β) $309 - 188$	(γ) $59 \cdot 3$	(δ) $39 \div 4$
(ε) $63 \div 19$	(στ) $287 \cdot 12$	(ζ) $123 \cdot 41$	(η) $597 \div 28$

3. Είστε στο ταχυδρομείο για να στείλετε 19 πακέτα. Το κόστος αποστολής είναι από €9 μέχρι €12. Εκτιμήστε το κόστος αποστολής όλων των πακέτων.

4. Για την εκτίμηση του πηλίκου $472 \div 58$ δυο μαθητές χρησιμοποιούν τις ακόλουθες προσεγγίσεις:

(α) $472 \div 58 \approx 500 \div 50$ (β) $472 \div 58 \approx 420 \div 60$

Χωρίς να κάνετε τις πράξεις να βρείτε ποια είναι η ψηλότερη και ποια η χαμηλότερη εκτίμηση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Ένα φύλλο χαρτιού έχει πάχος 0,012 cm. Πόσα, κατά προσέγγιση, φύλλα χαρτιού υπάρχουν σε μια στήλη χαρτιού ύψους 6,35 cm ;
6. Ένα ηλεκτρονικό αρχείο κειμένου έχει μέγεθος 316 kilobytes. Ένα άλλο έχει μέγεθος 1495 kilobytes. Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το συνολικό μέγεθος των δυο αρχείων από το μικρότερο αρχείο; (Να δώσετε μια απάντηση κατά προσέγγιση).
7. Πόσοι περίπου δοκιμαστικοί σωλήνες χωρητικότητας 24 cm^3 μπορούν να γεμίσουν από ένα δοχείο του ενός λίτρου ($1 \text{ λίτρο} = 1000 \text{ cm}^3$).
8. Αν κάποιος βαδίζει με ρυθμό 70 μέτρα το λεπτό, να εκτιμήσετε τον χρόνο που θα χρειαστεί, για να βαδίσει μια απόσταση τριών χιλιομέτρων.
9. Ένα σεντ του ευρώ ζυγίζει 2,27 gr. Να βρείτε πόσο ζυγίζουν χίλια ευρώ σε νομίσματα του ενός σεντ.



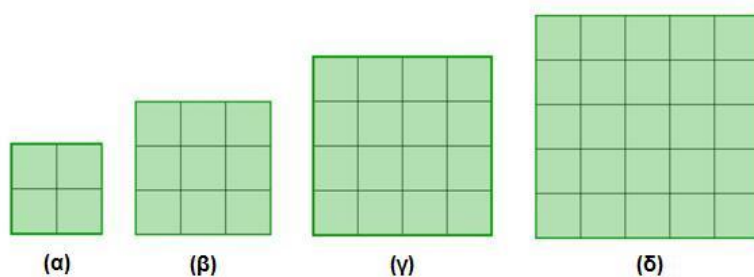
Δυνάμεις με εκθέτη φυσικό αριθμό

Διερεύνηση

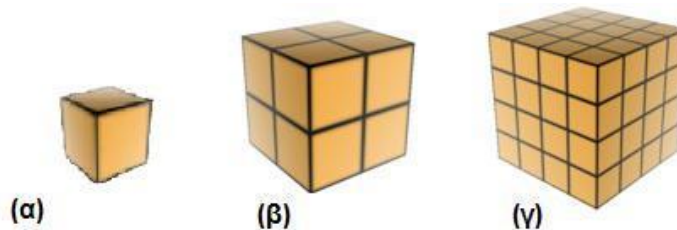
1. Στην αστρονομία έτος φωτός είναι η απόσταση που ταξιδεύει το φως σε ένα χρόνο. Οι αστρονόμοι εκτιμούν ότι η διάμετρος του σπειροειδούς Γαλαξία Βίκρο είναι περίπου 100 000 έτη φωτός.
 - ✓ Να γράψετε τον αριθμό αυτό ως γινόμενο του 10.
 - ✓ Πόσους παράγοντες του 10 έχει ο αριθμός 100 000;



2. Να γράψετε μια αριθμητική παράσταση για τον αριθμό των μικρών τετραγώνων που συναποτελούν καθένα από τα επόμενα τετράγωνα.



3. Να γράψετε μια αριθμητική παράσταση για τον αριθμό των μικρών κύβων που συναποτελούν καθένα από τους επόμενους κύβους.



4. Ο Κυριάκος είναι υπεύθυνος της ομάδας εθελοντισμού του σχολείου του και θέλει να ειδοποιήσει τα μέλη της ομάδας για την επόμενη δράση τους. Τηλεφωνεί σε 3 μέλη της ομάδας και τους παρακαλεί να ειδοποιήσουν ο καθένας τους άλλα τρία μέλη. Στη συνέχεια τα μέλη που θα ειδοποιηθούν θα ειδοποιήσουν, με τη σειρά τους, άλλα τρία μέλη ο καθένας. Ο Κυριάκος έχει υπολογίσει ότι όλα τα μέλη θα ειδοποιηθούν, αν η πιο πάνω διαδικασία γίνει 4 φορές.



- ✓ Να γράψετε μια ακολουθία αριθμών που
 - (α) κάθε όρος της αντιστοιχεί στην κάθε φάση της τηλεφωνικής ειδοποίησης.
 - (β) κάθε όρος της ακολουθίας των αριθμών είναι το σύνολο των παιδιών που έχουν ειδοποιηθεί μέχρι εκείνη τη στιγμή.
- ✓ Πόσα παιδιά έχει ο όμιλος εθελοντισμού του σχολείου;

Τι πρέπει να ξέρετε

- Το γινόμενο, $\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n \text{ παράγοντες}}$ οποιουδήποτε αριθμού α που έχει n παράγοντες ίσους με α λέγεται **δύναμη του α στη n ή n -οστή δύναμη του α** και συμβολίζεται ως

$$\alpha^n$$

Το α λέγεται **βάση** της δύναμης και το n λέγεται **εκθέτης** της δύναμης

- Ορίζουμε τη μηδενική δύναμη ενός αριθμού να είναι ίση με το 1, δηλαδή,

$$\alpha^0 = 1$$

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Να γράψετε τις επόμενες δυνάμεις ως γινόμενα και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή τους:

$$(α) \quad 11^2 \qquad (β) \quad 5^4 \qquad (γ) \quad 3^6 \qquad (δ) \quad \text{Έξι στον κύβο}$$

Λύση

$$(α) \quad 11^2 = 11 \cdot 11 = 121$$

$$(β) \quad 5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

$$(γ) \quad 3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$$

$$(δ) \quad \text{έξι στον κύβο} = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

- Το byte είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται στην τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών, για να περιγράψει μια μικρή ποσότητα πληροφορίας που αποθηκεύεται στη μνήμη του υπολογιστή. Για παράδειγμα, για να αποθηκευτεί στη μνήμη ένας χαρακτήρας (γράμμα ή αριθμός) χρειάζεται χωρητικότητα μνήμης ενός byte. Ένα Kilobyte ορίζεται ως 2^{10} bytes. Αν ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής αποθηκεύει πληροφορία που αντιστοιχεί σε ένα Kilobyte, πόσοι χαρακτήρες περιέχονται στην πληροφορία;

Να χρησιμοποιήσετε την υπολογιστική αριθμομηχανή, για να βρείτε την απάντηση.

Λύση:

Στην υπολογιστική αριθμομηχανή υπάρχει το πλήκτρο



για τον υπολογισμό της δύναμης.

Στην αριθμομηχανή γράφουμε:



Παίρνουμε την απάντηση $2^{10} = 1024$

1. Χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής να βρείτε τις δυνάμεις:

(α) 7^2	(β) 12^2	(γ) 100^2	(δ) 3^5
(ε) 3^5	(στ) 10^4	(ζ) 5^0	(η) 1^6

2. Να γράψετε τους επόμενους αριθμούς ως δυνάμεις με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

(α) 64	(β) 256	(γ) 729	(δ) 15625
--------	---------	---------	-----------

3. Να χρησιμοποιήσετε την αριθμομηχανή σας για να βρείτε τις επόμενες δυνάμεις:

(α) 5^8	(β) 41^4	(γ) 7^{10}	(δ) 96^5
-----------	------------	--------------	------------

4. Μια αντλία νερού εργάζεται με ηλιακή ενέργεια που λαμβάνεται από δυο φωτοβολταϊκά ηλιακά πλαίσια. Κάθε πλαίσιο έχει 6 σειρές από ηλιακές κυψέλες και κάθε σειρά περιέχει 6 κυψέλες. Πόσες κυψέλες έχει το κάθε ηλιακό πλαίσιο; Να γράψετε τον ζητούμενο αριθμό σε μορφή δύναμης και στη συνέχεια να τον υπολογίσετε.

5. Την Τρίτη καλείς δυο φίλους σου, για να παίξετε μαζί το ερχόμενο Σάββατο ποδόσφαιρο στα γήπεδα φούτσαλ της γειτονιάς σου. Την Τετάρτη καθένας από τους φίλους αυτούς καλεί άλλους δυο φίλους στο παιχνίδι. Το μοτίβο αυτό συνεχίζεται και την Πέμπτη και την Παρασκευή.

(α) Πόσα παιδιά προσκλήθηκαν την Παρασκευή;

(β) Πόσα παιδιά προσκλήθηκαν συνολικά;

6. Ένας Περσικός μύθος αναφέρεται στον άνθρωπο που δημιούργησε το σκάκι. Ο βασιλιάς ενθουσιάστηκε πολύ από το παιχνίδι αυτό και προσφέρθηκε να ικανοποιήσει κάποια επιθυμία του δημιουργού. Ο δημιουργός τότε ζήτησε να του δώσει ο βασιλιάς ένα σπυρί σιτάρι για το πρώτο τετραγωνάκι της σκακιέρας, δυο για το δεύτερο, τέσσερα για το τρίτο κ.ο.κ.

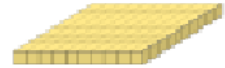


(α) Να βρείτε πόσα τετράγωνα έχει η σκακιέρα.

(β) Να γράψετε σε μορφή δύναμης τον αριθμό των σιταριών που αντιστοιχούν στο τέταρτο και πέμπτο τετράγωνο.

(γ) Να γράψετε σε μορφή δύναμης τον αριθμό των σιταριών που αντιστοιχούν στο τελευταίο τετράγωνο.

7. Παίρνουμε 100 κύβους που ενωμένοι φτιάχνουν ένα μεγάλο τετράγωνο, για να δημιουργήσουμε δυο μικρότερα τετράγωνα. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις (σε αριθμό κύβων) των μικρότερων τετραγώνων ώστε να χρησιμοποιηθούν όλοι οι κύβοι;



8. Ένα Megabyte (Mb) ορίζεται ως 2^{20} bytes και ένα Gigabyte (Gb) ορίζεται ως 2^{30} bytes.

(α) Μια ράβδος μνήμης (memory stick) έχει χωρητικότητα ένα gigabyte. Να βρείτε πόσοι χαρακτήρες μπορούν να αποθηκευτούν στη ράβδο μνήμης.

(β) Ένα ψηφιακός δίσκος (CD) έχει χωρητικότητα 720Mb. Πόσους χαρακτήρες μπορεί να χωρέσει;

(Να χρησιμοποιήσετε την αριθμομηχανή σας)

Το Δυαδικό Σύστημα Αρίθμησης

Εξερεύνηση

Όπως κάθε λαός είχε τα δικά του σύμβολα για τους αριθμούς, με τον ίδιο τρόπο ανέπτυξε και δικούς του τρόπους για να εκτελεί τις τέσσερις πράξεις των αριθμών. Στην εικόνα, ένας Αιγύπτιος παρουσιάζει στην ιερογλυφική γραφή τον τρόπο υπολογισμού του γινομένου. $53 \cdot 72$. Δίπλα από την εικόνα παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού του γινομένου με τα δικά μας σύμβολα.



$1 \cdot 72 = 72$

$2 \cdot 72 = 144$

$4 \cdot 72 = 288$

$8 \cdot 72 = 576$

$16 \cdot 72 = 1152$

$32 \cdot 72 = 2304$

$72 + 288 + 1152 + 2304 = 3816$

- Να μελετήσετε τον τρόπο πολλαπλασιασμού των αρχαίων Αιγυπτίων.
- Είναι δυνατό να εκτελέσουμε όλους τους πολλαπλασιασμούς, χρησιμοποιώντας τον τρόπο των Αιγυπτίων;

Τι πρέπει να ξέρετε

- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυνάμεων του 2. Στο ανάπτυγμα αυτό κάθε δύναμη του 2 χρησιμοποιείται το πολύ μια φορά. Για παράδειγμα:

(α) $5 = 2^2 + 2^0$

5				✓		✓
	← ...	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
				1	0	1

(β) $15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

15			✓	✓	✓	✓
	← ...	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
			1	1	1	1

(γ) $33 = 2^5 + 2^0$

33		✓					✓
	← ...	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
		1	0	0	0	0	1

- Στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης χρησιμοποιούνται μόνο τα ψηφία **0** και **1**.

Η αξία θέσης κάθε ψηφίου στο δυαδικό σύστημα αντιστοιχεί στη δύναμη του 2 με εκθέτη τη θέση του ψηφίου μειωμένη κατά 1.

Για παράδειγμα, στον αριθμό 1001 του δυαδικού συστήματος η πρώτη, από αριστερά, μονάδα βρίσκεται στην τέταρτη θέση και αντιστοιχεί στο $2^3 = 8$ του δεκαδικού συστήματος. Η τελευταία, από τα αριστερά, μονάδα που βρίσκεται στην πρώτη θέση αντιστοιχεί στον αριθμό $2^0 = 1$ του δεκαδικού συστήματος.

- Δηλώνουμε ότι ένας αριθμός είναι γραμμένος στο δυαδικό σύστημα γράφοντας σε παρένθεση (στη θέση δείκτη) τον αριθμό 2. Για παράδειγμα: $10010_{(2)}$

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Να μετατρέψετε τους επόμενους δυαδικούς αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα.

(α) 111

(β) 101

(γ) 1100110

Λύση

Για κάθε αριθμό σκεφτείτε την αξία θέσης κάθε ψηφίου

$$(α) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow 4 + 2 + 1 = 7$$

$$(β) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow 4 + 0 + 1 = 5$$

$$(γ) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow 64 + 32 + 0 + 0 + 4 + 2 + 0 = 102$$

- Να μετατρέψετε τους επόμενους δεκαδικούς αριθμούς στο δυαδικό σύστημα.

(α) 3

(β) 11

(γ) 140

Λύση

Πρέπει να γράψουμε τους αριθμούς αυτούς με βάση την αξία θέσης ψηφίου στο δυαδικό σύστημα (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...).

$$(α) \quad 3 = 2 + 1 \quad \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 2^1 & 2^0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Επομένως, $3_{(10)} = 11_{(2)}$

$$(β) \quad 11 = 8 + 2 + 1 \quad \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Επομένως, $11_{(10)} = 1011_{(2)}$

$$(γ) \quad 140 = 128 + 8 + 4 \quad \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Επομένως, $140_{(10)} = 10001100_{(2)}$

- Να μετατρέψετε τους επόμενους δυαδικούς αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

(α) 110

(β) 1111

(γ) 1001

(δ) 1101

(ε) 10001

(στ) 11011

(ζ) 1111111

(η) 1110001

(θ) 10101010

- Να μετατρέψετε τους επόμενους δεκαδικούς αριθμούς στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

(α) 9

(β) 8

(γ) 14

(δ) 17

(ε) 18

(στ) 30

(ζ) 47

(η) 52

(θ) 67

3. Ένας αριθμός στο δυαδικό σύστημα έχει τρία ψηφία.
(α) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος και ο μικρότερος πιθανός δυαδικός αριθμός;
(β) Να μετατρέψετε τους αριθμούς αυτούς στο δεκαδικό σύστημα.
4. Ένας δεκαδικός αριθμός μετατρέπεται στο δυαδικό και δίνει τετραψήφιο αριθμό. Ποιος θα μπορούσε να είναι ο δεκαδικός αριθμός;
5. Στη φωτογραφία βλέπετε ένα στιγμιότυπο από ένα δυαδικό ρολόι. Τα φωτεινά λαμπάκια αναβοσβήνουν, για να δηλώσουν την ώρα. Να διαβάσετε την ώρα που δείχνει το ρολόι (οι αριθμοί διαβάζονται από κάτω προς τα πάνω). Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε.



ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

Εξερεύνηση

1. Πιο κάτω παρουσιάζεται ο αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού γνωστός ως αλγόριθμος των «Ρώσων Χωρικών».

16	·	24	=	
8	·	48	=	
4	·	96	=	
2	·	192	=	
1	·	384	=	384

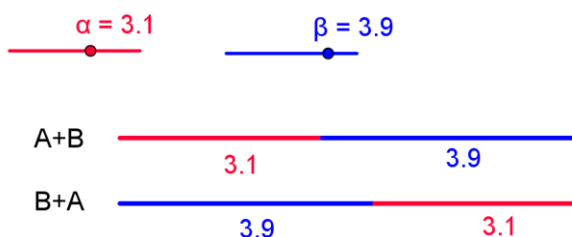
- Να επεξηγήσετε τον πιο πάνω αλγόριθμο και να αιτιολογήσετε την ορθότητά του
2. Όταν ο μεγάλος μαθηματικός Γκάους, (Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855) ήταν μαθητής, ο δάσκαλος του ρώτησε τα παιδιά στην τάξη να αθροίσουν όλους τους ακέραιους αριθμούς από το 1 μέχρι το 100. Ο Γκάους υπολόγισε το άθροισμα σχεδόν αμέσως.
Πρώτα έγραψε όλους τους όρους του αθροίσματος σε δύο σειρές. Μια αύξουσα και μια φθίνουσα όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

- Να ερμηνεύσετε τη σκέψη του Γκάους.
- Ποιο είναι το ζητούμενο άθροισμα;

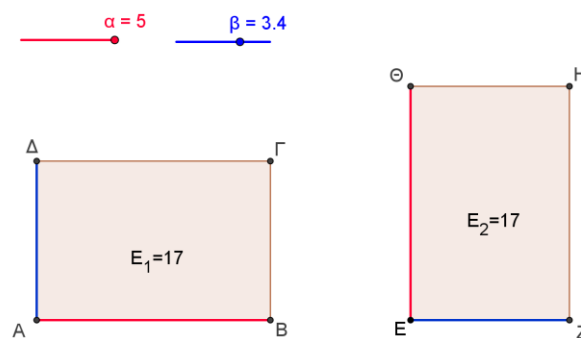
Διερεύνηση

1. Στο εφαρμογίδιο «antimetathetiki_1.ggb» δύο μεταβλητά ραβδάκια ενώνονται, για να φτιάξουν ένα μεγάλο ραβδί που έχει μήκος το άθροισμά τους.



- ✓ Τι παρατηρείτε για τη σειρά με την οποία αθροίζονται τα δυο ραβδάκια;
- ✓ Να διατυπώσετε έναν κανόνα για τη σειρά των όρων ενός αθροίσματος.
- ✓ Τι παρατηρείτε για το άθροισμα, όταν το μήκος του ενός από τα δυο ραβδιά είναι μηδέν; Πώς επηρεάζεται ένα άθροισμα, όταν ο ένας προσθετέος όρος είναι μηδέν;

2. Στο εφαρμογίδιο «antimetathetiki_2.ggb» κατασκευάζονται δυο ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Το πρώτο ορθογώνιο έχει μήκος «α» και πλάτος «β» και το δεύτερο ορθογώνιο έχει μήκος «β» και πλάτος «α».



- ✓ Να δώσετε έναν τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού των δυο ορθογωνίων.
 - ✓ Τι παρατηρείτε ως προς το εμβαδόν των δυο ορθογωνίων για διάφορες τιμές των α και β;
 - ✓ Να διατυπώσετε έναν κανόνα για τη σειρά των όρων ενός γινομένου.
 - ✓ Με τι ισούται το εμβαδόν του ορθογωνίου, όταν ο ένας από τους δυο όρους είναι ίσος με μονάδα;
3. Ο αριθμός των θερμίδων που λαμβάνονται από ένα κανονικό πρόγευμα προέρχεται από τρεις πηγές: 144 θερμίδες από τους υδρογονάνθρακες, 108 θερμίδες από τα λίπη και 56 θερμίδες από τις πρωτεΐνες.

Ένας μαθητής προσπαθεί να ομαδοποιήσει τους αριθμούς ώστε να υπολογίζει εύκολα το άθροισμα.

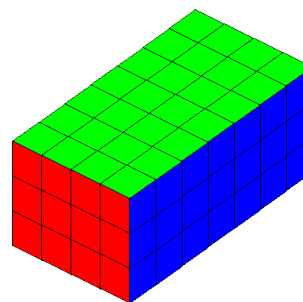
- ✓ Να γράψετε όλες τις πιθανές ομαδοποιήσεις του αθροίσματος των θερμίδων.
- ✓ Να βρείτε το άθροισμα όλων των αθροιστικών παραστάσεων που δημιουργήσατε.
- ✓ Ποια ομαδοποίηση προσφέρεται περισσότερο για σκοπούς υπολογισμού;
- ✓ Να δώσετε ισοδύναμες εκφράσεις της παράστασης $\alpha + (\beta + \gamma)$ όπου α, β και γ είναι αριθμοί.



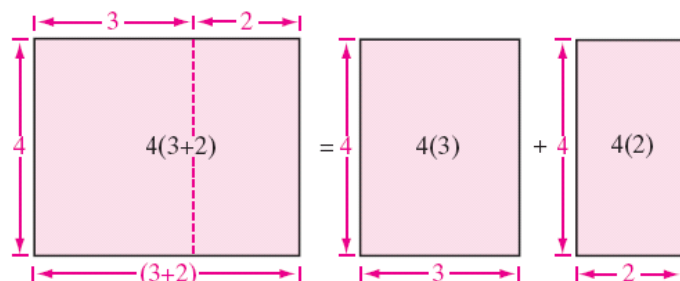
4. Ένας τρόπος υπολογισμού του πλήθους των κύβων που συναποτελούν το στερεό που φαίνεται παραπλεύρως είναι ο εξής:

$$N = (4 \cdot 3) \cdot 7$$

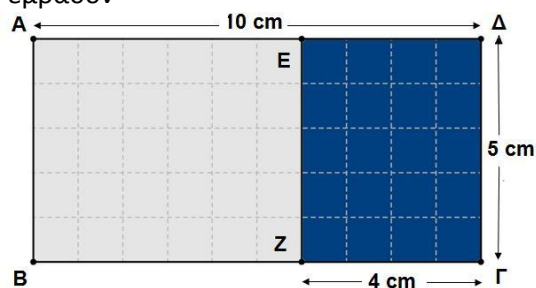
- ✓ Σε τι αντιστοιχεί το γινόμενο στην παρένθεση;
- ✓ Το είδος αυτό του στερεού λέγεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Να δώσετε δυο άλλες παραστάσεις με παρένθεση που να δίνουν το πλήθος των κύβων που συναποτελούν το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.



5. Στο επόμενο σχεδιάγραμμα παρουσιάζεται το ανάπτυγμα του γινομένου $4 \cdot (3 + 2)$.



- ✓ Να χρησιμοποιήσετε ένα παρόμοιο μοντέλο με εμβαδά, για να εκφράσετε το άθροισμα, $3 \cdot 5 + 3 \cdot 2$.
 - ✓ Να γράψετε ένα γενικό κανόνα για τα αναπτύγματα $a \cdot (\beta + \gamma)$ όπου a , β και γ είναι αριθμοί.
6. Από ένα ορθογώνιο χαρτόνι μήκους 10 cm και πλάτους 5 cm αποκόπτεται ένα κομμάτι μήκους 4 cm. Να γράψετε μια έκφραση για το εμβαδόν
- (α) του αρχικού χαρτονιού
 - (β) του χαρτονιού που αποκόπτεται
 - (γ) του χαρτονιού που απομένει.
 - ✓ Ποιο εμβαδόν εκφράζει η παράσταση $(10 - 4) \cdot 5$;
 - ✓ Ποιο είναι το ανάπτυγμα της παράστασης $a \cdot (\beta - \gamma)$ όπου a , β και γ είναι αριθμοί;



Τι πρέπει να ξέρετε

Η πρόσθεση έχει τις εξής ιδιότητες:

- **Αντιμεταθετική:** $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
- **Προσεταιριστική:** $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- Το 0 είναι **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**, δηλαδή όταν προστεθεί σε ένα αριθμό δεν τον μεταβάλλει:

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

Ο πολλαπλασιασμός έχει τις εξής ιδιότητες:

- **Αντιμεταθετική:** $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- **Προσεταιριστική:** $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
- **Επιμεριστική** ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad \text{και} \quad \alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Το 1 είναι το **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**, δηλαδή, όταν ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό 1 δεν μεταβάλλεται.

$$1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

- Όταν ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται με το 0, μηδενίζεται.

$$0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$$

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $4 \cdot (11 \cdot 25)$

(β) $(97 + 25) + 3 =$

Λύση: (α) $4 \cdot (11 \cdot 25) =$

$$= 4 \cdot (25 \cdot 11) \quad (\text{αντιμεταθετική ιδιότητα πολλαπλασιασμού})$$

$$= (4 \cdot 25) \cdot 11 \quad (\text{προσεταιριστική ιδιότητα πολλαπλασιασμού})$$

$$= 100 \cdot 11$$

$$= 1100$$

(β) $(97 + 25) + 3$

$$= (25 + 97) + 3 \quad (\text{αντιμεταθετική ιδιότητα πρόσθεσης})$$

$$= 25 + (97 + 3) \quad (\text{προσεταιριστική ιδιότητα πρόσθεσης})$$

$$= 25 + 100$$

$$= 125$$

- Να βρείτε το γινόμενο $85 \cdot 98$

Λύση: $85 \cdot 98 =$

$$= 85 \cdot (100 - 2)$$

$$= 85 \cdot 100 - 85 \cdot 2 \text{ (επιμεριστική ιδιότητα πολλαπλασιασμού πάνω στη διαφορά)}$$

$$= 8500 - 170 = 8330$$

- Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $(\alpha + 2) + 7$

(β) $5 \cdot (\beta \cdot 9)$

Λύση: (α) $(\alpha + 2) + 7$

$$= \alpha + (2 + 7) \text{ (επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$= \alpha + 9$$

(β) $5 \cdot (\beta \cdot 9)$

$$= (5 \cdot 9) \cdot \beta \text{ (επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$= 45\beta$$

1. Να αναγνωρίσετε τις ιδιότητες των πράξεων στις επόμενες ισότητες.

(α) $7 + 5 = 5 + 7$

(β) $8 + 0 = 8$

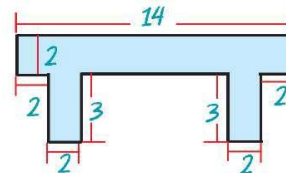
(γ) $12 \cdot 8 \cdot 4 = 8 \cdot 12 \cdot 4$

(δ) $1 \cdot 9 = 9 \cdot 1$

(ε) $46 \cdot 87 = 87 \cdot 46$

(στ) $3 \cdot (7 - 5) = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 5$

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχήματος, χρησιμοποιώντας κατάλληλα την επιμεριστική ιδιότητα



3. Ποια ιδιότητα της πρόσθεσης αφορά καθεμιά μια από τις επόμενες προτάσεις:
 - i. Στο ταμείο της υπεραγοράς θα πληρώσεις το ίδιο ποσό, ανεξάρτητα από τη σειρά με την οποία ο ταμίας πέρασε τα προϊόντα στην ταμειακή μηχανή.
 - ii. Αγοράζεις ένα ψηφιακό δίσκο προς €8, έναν άλλο προς €29.9 και έναν τρίτο προς €14,99. Μπορείς να προσθέσεις $(8 + 29.9) + 14,99$ ή $8 + (29,9 + 14,99)$.
4. Να εξετάσετε με κατάλληλα παραδείγματα, αν στην αφαίρεση ισχύει:
 - i. Η αντιμεταθετική ιδιότητα.
 - ii. Η προσεταιριστική ιδιότητα.

5. Ο Κώστας και ο Γιάννης πηγαίνουν μαζί στον κινηματογράφο. Αγοράζει ο καθένας το εισιτήριο του προς €9, καλαμπόκι και αναψυκτικό προς €5,25. Να γράψετε δυο αριθμητικές παραστάσεις που να δείχνουν πόσα συνολικά πλήρωσαν και οι δύο.

6. Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα για να απλοποιήσετε τις ακόλουθες παραστάσεις:

$$(α) \quad (\chi + 4) - 2 \cdot (\chi + 5) \qquad (β) \quad 0,5 \cdot (4z + 6)$$

$$(γ) \quad (8\chi + 12) \div 4 \qquad (δ) \quad (7 - 6\kappa) \div 3$$

7. Να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα:

$$(α) \quad 143 \cdot 72 + 143 \cdot 28 \qquad (β) \quad (\chi - 2) + 7$$

$$(γ) \quad 0,25 \cdot (6\alpha + 32) \qquad (δ) \quad 4,2 \cdot (\kappa - 11)$$

$$(ε) \quad 0,6 \cdot (0,2\chi - 2) \qquad (στ) \quad (2 - \lambda) \cdot 6$$

$$(ζ) \quad (\rho + 3) \cdot 5 \qquad (η) \quad 6 + 2(\chi - 5) + 7$$

$$(θ) \quad 6 \cdot (\mu + 7) + 4 \cdot (4 - \mu) \qquad (ι) \quad 5 \cdot (y - 11) + 2y$$

8. Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα, για να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(α) \quad (9\chi + 12) \div 3 \qquad (β) \quad (11\chi + 12) \div 2$$

$$(γ) \quad (7y - 21) \div 7 \qquad (δ) \quad (6z - 2) \div 2$$

9. Ένας μαθητής έγραψε $4(9\chi + 10) = 36\chi + 10$. Να εξηγήσετε το λάθος του μαθητή.

10. Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα, για να δείξετε πώς μπορείτε να υπολογίσετε νοερά την τιμή, $6 \cdot (19,99)$.

11. Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα, για να βρείτε το γινόμενο $9 \cdot (5998)$.

12. Αν $x + y = 8$ να βρείτε την τιμή των παραστάσεων,

$$(α) \quad 4x + 4y + 12 \qquad (β) \quad 3x + 10y + 4x - 3y$$

13. Αν $\alpha + \beta = 7$ και $\beta - \gamma = 2$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων,

$$(α) \quad 3\alpha + 7\beta - 4\gamma \qquad (β) \quad 5\alpha + 8\beta - 3\gamma + 2$$

14. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα,

(α) $1 + 2 + 3 + \dots + 81$

(β) $1 + 2 + 3 + \dots + 201$

15. Να εξετάσετε κατά πόσο οι επόμενες προτάσεις είναι ορθές:

(α) $(16 \div 4) \div 2 = 16 \div (4 \div 2)$

(β) $(36 \div 6) \div 2 = (36 \div 2) \div 6$

(γ) Η διαίρεση έχει την προσεταιριστική ιδιότητα.

16. Να εξετάσετε κατά πόσο οι επόμενες προτάσεις είναι ορθές:

(α) $(12 + 6) \div 2 = 12 \div 2 + 6 \div 2$

(β) $(25 - 10) \div 5 = 25 \div 5 - 10 \div 5$

(γ) $16 \div (3 + 5) = 16 \div 3 + 16 \div 5$

(δ) $12 \div (6 - 3) = 12 \div 6 - 12 \div 3$

(γ) Η διαίρεση έχει την επιμεριστική ιδιότητα πάνω στην πρόσθεση και την αφαίρεση.

17. Να αναγνωρίσετε τις ιδιότητες των πράξεων που δηλώνουν οι επόμενες ισότητες:

(α) $(x + 5y) + 2 = x + (5y + 2)$ (β) $3\kappa + 2\lambda = 2\lambda + 3\kappa$

(γ) $\alpha^2 \cdot \beta = \beta \cdot \alpha^2$ (δ) $\delta^7 \cdot 1 = \delta^7$

Η Προτεραιότητα των Πράξεων

Διερεύνηση

1. Ο κύριος Ιακώβου είναι συνδρομητής σε ένα τηλεπικοινωνιακό πακέτο μιας εταιρείας. Το σχέδιο προνοεί χρέωση €47 τον μήνα για τηλεφωνικές κλήσεις και €0,30 το λεπτό, για να μπορεί να διαβάζει τα ηλεκτρονικά μηνύματα από το τηλέφωνο. Τον περασμένο μήνα χρησιμοποίησε 10 λεπτά για ανάγνωση ηλεκτρονικών μηνυμάτων. Πόσο είναι το συνολικό ύψος του λογαριασμού του κ. Ιακώβου τον προηγούμενο μήνα;



- ✓ Να γράψετε μια αριθμητική παράσταση της οποίας η τιμή είναι ίση με το ύψος του λογαριασμού.
- ✓ Πόσες πράξεις έχει η αριθμητική παράστασή σας;
- ✓ Με ποια σειρά πρέπει να εκτελέσετε τις πράξεις;

2. Αγοράζετε ένα κομμάτι ύφασμα και ανάλογο μήκος κεντητής δαντέλας αρκετό για να ετοιμάσετε δυο μαξιλαροθήκες. Η κεντητή δαντέλα στοιχίζει €5. Κάθε μαξιλαροθήκη χρειάζεται ύφασμα η αξία του οποίου είναι €3,95 και ένα κουμπί που κοστίζει €0,75.



- ✓ Να χρησιμοποιήσετε το σύμβολο της παρένθεσης για να γράψετε μια αριθμητική παράσταση που να υπολογίζει το συνολικό κόστος κατασκευής.
- ✓ Να βρείτε το κόστος της κατασκευής.

Τι πρέπει να ξέρετε

- Στις αριθμητικές παραστάσεις υπάρχουν μια ή περισσότερες πράξεις καθώς και δυνάμεις αριθμών. Στην αριθμητική παράσταση είναι δυνατό να υπάρχουν **σύμβολα ομαδοποίησης**, όπως οι *παρενθέσεις* (), οι *αγκύλες* [] και τα *άγκιστρα* { }.

Για παράδειγμα:

$$A = 3^2 + (11 - 2)$$

$$B = 0,5 \cdot [10 - (7 - 3)]$$

- Η σειρά με την οποία εκτελούμε τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση είναι η ακόλουθη:

1	Πράξεις που περιέχονται μέσα στα σύμβολα ομαδοποίησης
2	Δυνάμεις αριθμών
3	Πολλαπλασιασμοί και Διαιρέσεις. (Σύμφωνα με τη σειρά που εμφανίζονται από αριστερά προς τα δεξιά).
4	Προσθέσεις και Αφαιρέσεις. (Σύμφωνα με τη σειρά που εμφανίζονται από αριστερά προς τα δεξιά).

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

i. $14 - 2 \cdot 5$

ii. $11 - 8 + 2$

iii. $16 + 4 \div 2 - 6$

iv. $4 + 3^4$

v. $(3 + 1) \cdot 5$

vi. $60 \div (12 + 2^3) \cdot 3$

Λύση:

i. $14 - 2 \cdot 5$ Εκτελείται πρώτα ο πολλαπλασιασμός.
 $= 14 - 10$ Εκτελείται η αφαίρεση.
 $= 4$

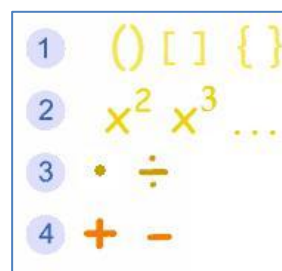
ii. $11 - 8 + 2$ Πρόσθεση και αφαίρεση.
 $= 3 + 2$ Εκτελείται η αφαίρεση (πρώτη στα αριστερά).
 $= 5$ Εκτελείται η πρόσθεση.

iii. $16 + 4 \div 2 - 6$
 $= 16 + 2 - 6$ Εκτελείται πρώτα η διαίρεση.
 $= 18 - 6$ Εκτελείται η πρόσθεση (πρώτη στα αριστερά).
 $= 12$ Εκτελείται η αφαίρεση.

iv. $4 + 3^4$
 $= 4 + 81$ Εκτελείται πρώτα η δύναμη.
 $= 85$ Εκτελείται η πρόσθεση.

v. $(3 + 1) \cdot 5$
 $= 4 \cdot 5$ Εκτελείται πρώτα η πράξη στην παρένθεση.
 $= 20$ Εκτελείται ο πολλαπλασιασμός.

vi. $60 \div (12 + 2^3) \cdot 4$ Από τις πράξεις στην παρένθεση εκτελείται πρώτα η Δύναμη.
 $= 60 \div (12 + 8) \cdot 4$ Ακολουθώς εκτελείται η πρόσθεση μέσα στην παρένθεση.
 $= 60 \div 20 \cdot 4$ Εκτελείται η διαίρεση, πρώτη από αριστερά.
 $= 3 \cdot 4 = 12$ Εκτελείται ο πολλαπλασιασμός.



1. Να βρείτε την τιμή των επόμενων παραστάσεων

(α) $8 + 4 - 3$

(β) $9 + 12 - 15$

(γ) $38 - 19 + 12$

(δ) $7 + 9(3 + 8)$

(ε) $(9 + 2)6 - 5$

(στ) $63 \div (10 - 3)3$

(ζ) $27 \div (3 + 6)5 - 12$

(η) $55 \div 11 + 7(2 + 14)$

(θ) $5^3 - 12 \div 3$

(ι) $26 + 6^2 \div 4$

(ια) $15 - 2^3 \div 4$

(ιβ) $22 \div 2 \cdot 3^2$

(ιγ) $8 \cdot (2^4 - 3) + 8$

(ιδ) $12 \div 4 + (5^2 - 6)$

(ιε) $9 + 4^3 \cdot (20 - 8) \div 2 + 6$

(ιστ) $96 \div 4^2 + (25 \cdot 2) - 15 - 3$

(ιζ) $2(6 - 2)^2 + (6 - 2) - 2^3(7 - 4)$

(ιη) $6^2 \cdot (5^2 - 4^2)$

(ιθ) $(3^2 \cdot 2 - 2 \cdot 5) \div 4 - (3^2 - 2^2) \div 5$

(κ) $\{(16 \div 2 + 4) - 10\}^3 - 12 \div 3$

2. Να γράψετε μια αριθμητική παράσταση η τιμή της οποίας να είναι 10 και να περιέχει τέσσερις διαφορετικούς αριθμούς και δυο διαφορετικές πράξεις.

3. Μια ομάδα 15 γονιών του συνδέσμου γονέων του σχολείου αγοράζουν λαχνούς για να ενισχύσουν ένα φιλανθρωπικό σκοπό και τους γίνεται συνολική έκπτωση €2. Η κανονική τιμή ενός λαχνού είναι €25. Να γράψετε μια αριθμητική παράσταση για το πρόβλημα και να βρείτε πόσα πλήρωσε τους λαχνούς η ομάδα των γονιών.

4. Να εξετάσετε κατά πόσο είναι αναγκαίες οι παρενθέσεις στην επόμενη παράσταση,

$$A = (6 \cdot 7) - (5 \cdot 2)$$

5. Να γράψετε μια αριθμητική παράσταση που να περιέχει τις τέσσερις πράξεις και καθόλου σύμβολα ομαδοποίησης. Η τιμή παράστασης να είναι η ίδια ανεξάρτητα από το αν οι πράξεις γίνουν από αριστερά προς τα δεξιά ή από δεξιά προς τα αριστερά.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να εκτιμήσετε την τιμή των επόμενων παραστάσεων. Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε την αριθμομηχανή σας για να βρείτε την ακριβή τιμή τους και να την στρογγυλοποιήσετε με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου.

(α) $A = (12,3 + 64,9) \div (6,9 - 4,1)$

(β) $B = (13,8 \cdot 23,9) \div (3,2 \cdot 6,1)$

(γ) $\Gamma = (48,2 + 58,9) \div (3,62 \cdot 0,042)$

2. Θέλετε να συμβάλετε στη συλλογή εισφορών για τις ιατρικές ανάγκες ενός μικρού παιδιού που πάσχει από μια σπάνια ασθένεια. Για κάθε ηλεκτρονικό μήνυμα που προωθείται για το σκοπό αυτό αποταμιεύεται σε ειδικό ταμείο ένα μικρό ποσό. Στέλλετε το μήνυμα σε τρεις φίλους σας. Την επόμενη ημέρα οι φίλοι σας προωθούν το μήνυμα σε τρία άτομα ο καθένας. Το μοτίβο συνεχίζεται για μερικές ημέρες.
(α) Με το τέλος της τέταρτης ημέρας, πόσα άτομα θα έχουν λάβει το μήνυμα;
(β) Μετά από πόσες ημέρες θα έχουν λάβει το μήνυμα τουλάχιστον 10000 άτομα;

3. Ένας τετραψήφιος δυαδικός αριθμός έχει δυο μηδενικά και δυο μονάδες.
(α) Δώστε όλους τους πιθανούς δυαδικούς αριθμούς
(β) Να μετατρέψετε τους αριθμούς αυτούς στο δεκαδικό σύστημα

4. Ένας δυαδικός αριθμός με 8 ψηφία μετατρέπεται σε δεκαδικό.
(α) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός στο δεκαδικό σύστημα;
(β) Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός στο δεκαδικό σύστημα;

5. Να βρείτε την τιμή των επόμενων παραστάσεων:

(α) $A = (2^4 - 2^2 \cdot 3 \div 4) \cdot 2 - 5^2 + 3^2$

(β) $B = (100,8 \div 25,2 - 1)^2 + (8,75 \div 1,25 + 1)^2$

6. Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλα την επιμεριστική ιδιότητα για να ερμηνεύσετε τον αλγόριθμο των «Ρώσων χωρικών» στα επόμενα γινόμενα:

(α) $16 \cdot 135$

(β) $13 \cdot 250$

7. Στη χημεία το νερό χρησιμοποιείται ως διαλύτης των οξέων. Η ρίψη νερού πάνω στα οξέα μπορεί να προκαλέσει έκρηξη. Για αυτό είναι σημαντικό να ρίχνονται τα οξέα πάνω στο νερό. Να εξετάσετε αν η πρόσμιξη νερού και οξέων είναι αντιμεταθετική.

8. Πρόκειται να κατασκευάσουμε στην αυλή μια οκταγωνική υπαίθρια στεγασμένη κατασκευή. Το σχέδιο προβλέπει την τοποθέτηση μεταλλικών ράβδων περιμετρικά της βάσης της κατασκευής. Οι μεταλλικές ράβδοι έχουν μήκος $2,25\text{ m}$. Παράλληλα, θα τοποθετηθούν μεταλλικές ράβδοι περιμετρικά της οροφής που θα έχουν μήκος, $2,12\text{ m}$ η καθεμιά. Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα, για να υπολογίσετε πόσα μέτρα μεταλλικής ράβδου χρειάζονται, για να κατασκευαστεί η υπαίθρια στεγασμένη κατασκευή;



9. Να συμπληρώσετε τα κενά στο τετράγωνο παραπλεύρως έτσι ώστε το άθροισμα των γραμμών, των στηλών και των διαγωνίων είναι ίσο με $13,6$.

		0,8	5,2
	4,0	4,4	3,2
3,6			
1,6			0,4

10. Να τοποθετήσετε κατάλληλα παρενθέσεις στις επόμενες ισότητες έτσι ώστε να είναι αληθείς:

(α) $10 - 5 \cdot 3 = 15$

(β) $18 + 2 \cdot 5 = 100$

(γ) $25 + 7 + 3 \cdot 4 = 65$

(δ) $8 + 3 - 1 \cdot 5 = 50$

11. Να χρησιμοποιήσετε τον αριθμό 4 ακριβώς τρεις φορές για να γράψετε μια αριθμητική παράσταση η τιμή της οποίας να είναι (α) 2, (β) 3, (γ) 4, (δ) 5

