

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Γυμνασίου

Ενότητα 1α: Διαιρετότητα



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Α΄ Γυμνασίου
Ενότητα 1α: Διαιρετότητα

Συγγραφή:

Ομάδα Υποστήριξης Μαθηματικών

Συντονισμός έκδοσης:

Χρίστος Παρπούνας, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Έκδοση 2011

ISBN 978-9963-0-4578-5

**© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ**

Ευκλείδεια Διαίρεση

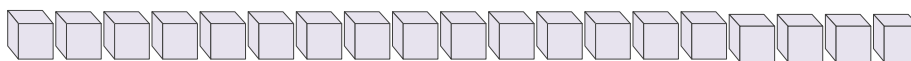
Εξερεύνηση

- Να υπολογίσετε την μέρα που θα έχουμε,
 - ✓ ύστερα από 245 ημέρες;
 - ✓ ύστερα από 400 ημέρες;
- Δίσεκτα λέγονται τα έτη που είναι πολλαπλάσια του 4 και δεν λήγουν σε 00. Τα έτη που λήγουν σε 00 είναι δίσεκτα αν είναι πολλαπλάσια του 400.
 - ✓ Είναι η φετινή χρονιά δίσεκτο έτος;
- Η ονομαστική γιορτή του κυρίου Αντώνη (17 Ιανουαρίου), ήταν φέτος ημέρα Πέμπτη. Βέβαια, θα προτιμούσε να ήταν Σάββατο ή Κυριακή για να έχει όλο τον χρόνο να δεξιωθεί τους συγγενείς και φίλους.
 - ✓ Να βρείτε ποιο έτος θα είναι η γιορτή του Αγίου Αντωνίου Σάββατο ή Κυριακή.



Διερεύνηση

1. Να τοποθετήσετε τους πιο κάτω κύβους ανά 5. Τι παρατηρείτε;



2. Ο καθηγητής φυσικής αγωγής πρέπει να αποφασίσει με ποιο τρόπο μπορεί να παρατάξει τους 168 μαθητές του σχολείου για την παρέλαση.
 - ✓ Μπορεί να φτιάξει τριάδες, τετράδες, πεντάδες, εξάδες ή επτάδες;

Τι πρέπει να ξέρετε

- Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ (**Διαιρετέος**) και δ (**διαιρέτης**), με $\delta \neq 0$, τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π (**πηλίκιο**) και ν (**υπόλοιπο**) έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$\Delta = \delta\pi + \nu \quad \text{με} \quad 0 \leq \nu < \delta$$

Μια διαίρεση της πιο πάνω μορφής λέγεται **Ευκλείδεια Διαίρεση**.

- Αν $\nu = 0$, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια διαίρεση**.

$$\Delta = \delta \cdot \pi$$

- Αν α και β είναι δυο φυσικοί αριθμοί ($\beta \neq 0$), ο αριθμός β **διαίρει** τον αριθμό α , αν υπάρχει φυσικός αριθμός γ , έτσι ώστε να ισχύει η τέλεια διαίρεση,

$$\alpha = \beta \cdot \gamma$$

Τότε:

- ✓ Ο αριθμός α λέγεται **πολλαπλάσιο** του αριθμού β .
- ✓ Ο αριθμός β **διαίρει** (ή **διαίρει ακριβώς**) τον αριθμό α .
- ✓ Ο συμβολισμός $\beta|\alpha$ δηλώνει ότι β διαίρει τον α .
- Παρατήρηση:
 - **Άρτιος** είναι ένας φυσικός αριθμός που διαιρείται με το 2

$$\alpha = 2 \cdot \nu \quad \nu \in \mathbb{N}_0$$

- **Περιττός** είναι ένας φυσικός αριθμός που διαιρούμενος με το 2 αφήνει υπόλοιπο 1.

$$\alpha = 2 \cdot \nu + 1 \quad \nu \in \mathbb{N}_0$$

Δραστηριότητες

- Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης:
 - (α) του 18 με τον 6 (β) του 124 με τον 8 (γ) του 29 με τον 29
 - (δ) του 5 με τον 20 (ε) του 0 με τον 23

Λύση

$$(α) \quad \begin{array}{r} 18 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{r} 6 \\ 3 \end{array} \right. \quad 18 = 6 \cdot 3 + 0 \quad \text{Πηλίκο 3, υπόλοιπο 0}$$

$$(β) \quad \begin{array}{r} 124 \\ 8 \\ 44 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{r} 8 \\ 15 \end{array} \right. \quad 124 = 8 \cdot 15 + 4 \quad \text{Πηλίκο 15, υπόλοιπο 4}$$

- Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν «Ευκλείδεια διαίρεση»;
 - (α) $120 = 28 \cdot 4 + 8$ (β) $1345 = 59 \cdot 21 + 106$ (γ) $374 = 8 \cdot 46 + 6$

Λύση

(α) Έχουμε $\nu = 8$, που είναι μικρότερος από το 28 και μεγαλύτερος από το 4. Άρα, είναι υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη μόνο το 28 και όχι το 4.

(β) Έχουμε $\nu = 106$, που είναι μεγαλύτερος από το 59 και από το 21. Άρα δεν είναι υπόλοιπο μιας Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη το 59 ή το 21.

(γ) Έχουμε $\nu = 6$, που είναι μικρότερος από το 8 και από το 48. Άρα είναι υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη είτε το 46 είτε το 8.

- Αν ένας αριθμός διαιρεθεί δια 14, δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 9. Ποιός είναι ο αριθμός αυτός;

Λύση

Στην ισότητα $\Delta = \delta \cdot \pi + \nu$ έχουμε $\delta = 14$, $\pi = 7$ και $\nu = 9$, άρα

$\Delta = 14 \cdot 7 + 9$ άρα ο αριθμός είναι ο 107

- Αν ένας φυσικός αριθμός ν διαιρεθεί με το 7, ποιοι αριθμοί μπορεί να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $\nu \div 7$;

Λύση

Θα πρέπει $0 \leq \nu < \delta$, δηλαδή έχουμε ότι $0 \leq \nu < 7$. Άρα το υπόλοιπο ν μπορεί να είναι 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

- Να βρείτε όλους του φυσικούς αριθμούς οι οποίοι, αν διαιρεθούν με το 4, δίνουν πηλίκο 10.

Λύση

Το υπόλοιπο μπορεί να είναι ίσο με 0, 1, 2, 3.

Αν $\nu = 0$, τότε έχουμε ότι: $\Delta = 4 \cdot 10 + 0 = 40$.

Αν $\nu = 1$, τότε έχουμε ότι: $\Delta = 4 \cdot 10 + 1 = 41$.

Αν $\nu = 2$, τότε έχουμε ότι: $\Delta = 4 \cdot 10 + 2 = 42$.

Αν $\nu = 3$, τότε έχουμε ότι: $\Delta = 4 \cdot 10 + 3 = 43$.

1. Ποιες διαιρέσεις προκύπτουν από την ισότητα $13 \cdot 12 = 156$;
2. Σε μια ευκλείδεια διαίρεση ο διαιρετέος είναι ο αριθμός 958 και ο διαιρέτης ο αριθμός 45. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο.
3. Να συμπληρωθεί ο πιο κάτω πίνακας, όπου Δ διαιρετέος, δ διαιρέτης, π πηλίκο και ν υπόλοιπο.

Δ	375		1514
δ	18	92	
π		8	15
ν		3	14

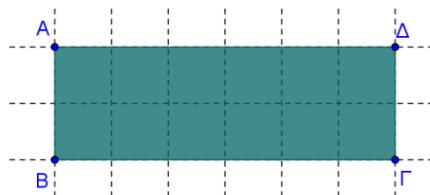
4. Να βρείτε τις αληθείς προτάσεις:
(α) $6 \mid 30$ (β) $5 \mid 24$ (γ) $20 \mid 5$ (δ) $8 \mid 64$
5. Να βρείτε ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι αληθείς.
(α) Το 60 είναι πολλαπλάσιο του 5 (β) Το 8 είναι πολλαπλάσιο του 40
(γ) Το 21 είναι πολλαπλάσιο του 21 (δ) Το 0 είναι πολλαπλάσιο του 3
6. Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος:
(α) διαιρείται τέλεια με το 13 και δίνει πηλίκο 15,
(β) διαιρείται τέλεια με το 7 και δίνει πηλίκο 6,
(γ) όταν διαιρεθεί με το 9, δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 3,
(δ) όταν διαιρεθεί με το 12, δίνει πηλίκο 8 και υπόλοιπο 10,
(ε) όταν διαιρεθεί με το 6, δίνει πηλίκο 1 και υπόλοιπο 3.
7. Σε μια ευκλείδεια διαίρεση το πηλίκο είναι 113, ο διαιρέτης είναι το 594 και το υπόλοιπο είναι το 312. Να βρείτε το διαιρετέο.
8. Να βρείτε τους μη μηδενικούς φυσικούς αριθμούς που, όταν διαιρεθούν με το 3, δίνουν πηλίκο εξαπλάσιο από το υπόλοιπο.
9. Ο κος Συμεού αγόρασε ένα αυτοκίνητο αξίας €28000 δίνοντας προκαταβολή €6800. Το υπόλοιπο ποσό συμφώνησε να το αποπληρώσει χωρίς τόκο σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε το ποσό της κάθε δόσης.
10. (α) Να εξετάσετε κατά πόσο το έτος 2014 είναι δίσεκτο.
(β) Αν τα Χριστούγεννα του 2014 είναι Πέμπτη, να βρεθεί η ημέρα των Χριστουγέννων του έτους 2016.
11. Ο συνολικός αριθμός μαθητών και καθηγητών ενός σχολείου είναι 468. Αν το σχολείο χρησιμοποιεί για μια εκδρομή λεωφορεία των 52 θέσεων:
(α) Πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν για την εκδρομή;
(β) Θα μπορούσε να ταξιδέψει ίσος αριθμός ατόμων σε κάθε λεωφορείο;
12. Ο Μάριος θέλει να κεράσει τους συμμαθητές της τάξης του την ημέρα των γενεθλίων του. Υπολόγισε ότι για να δώσει στον καθένα 12 καραμέλες δεν τον έφτανε το κουτί που περιείχε 210 καραμέλες. Για αυτό το λόγο αγόρασε το κουτί που περιείχε 220 καραμέλες. Κέρασε όλους τους συμμαθητές του από 12 καραμέλες. Όσες καραμέλες του περίσσεψαν τις μοίρασε εξίσου στους 2 φίλους του στο διπλανό τμήμα. Πόσες καραμέλες έδωσε ο Μάριος στον καθένα από τους φίλους του στο διπλανό τμήμα;

Πρώτοι και Σύνθετοι αριθμοί

Διερεύνηση

1. (α) Το εμβαδόν ενός ορθογώνιου κήπου είναι 12 m^2 . Να βρείτε όλες τους φυσικούς αριθμούς που θα μπορούσαν να είναι διαστάσεις του κήπου.

(β) Ποιες είναι οι δυνατές διαστάσεις (φυσικοί αριθμοί μόνο), όταν ο κήπος έχει εμβαδόν 11 m^2 .



2. Ο επόμενος πίνακας δείχνει τον αριθμό των ορθογωνίων που μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας 2, 3, 4 και περισσότερα τετράγωνα. Να συμπληρώσετε τον πίνακα μέχρι και τον αριθμό των 20 τετραγώνων. [εφαρμογίδιο, <http://www.its.caltech.edu/~pmath/version5.htm>]

Αριθμός Τετραγώνων	Ορθογώνια που κατασκευάζονται	Διαστάσεις
2		1×2
3		1×3
4		$1 \times 4, 2 \times 2$
5		1×5
6		$1 \times 6, 2 \times 3$
⋮		
20		

- ✓ Για ποιους αριθμούς μπορούν να κατασκευαστούν περισσότερα από ένα ορθογώνια;
 - ✓ Για ποιους αριθμούς ένα μόνο ορθογώνιο μπορεί να κατασκευαστεί;
 - ✓ Τι παρατηρείτε για τις διαστάσεις των ορθογωνίων στις περιπτώσεις που ένα μόνο ορθογώνιο μπορεί να κατασκευαστεί;
3. Σε ένα δοχείο τοποθετούνται χρωματιστές μπάλες (κόκκινες, κίτρινες μπλε και πράσινες). Στην κάθε μπάλα αντιστοιχεί ένας αριθμός σύμφωνα με τον πίνακα:

Κόκκινη = 2
Κίτρινη = 3
Μπλε = 5
Πράσινη = 7



Ο καθηγητής λέει σε ένα παιδί να πάρει από το δοχείο ένα αριθμό από μπάλες, όσες θέλει, να πολλαπλασιάσει την αξία τους και να ανακοινώσει το γινόμενο στην υπόλοιπη τάξη. Ο καθηγητής ισχυρίζεται πως γνωρίζοντας μόνο το γινόμενο είναι δυνατόν να προσδιοριστούν με ακρίβεια οι μπάλες που επιλέγονται από το δοχείο.

✓ Να βρείτε τις μπάλες (χρώμα και ποσότητα) αν το γινόμενο είναι:

(α) 28 (β) 210 (γ) 144 (δ) 1260

Τι πρέπει να ξέρετε

- Οι φυσικοί αριθμοί που έχουν μόνο δυο παράγοντες, τη μονάδα 1 και τον εαυτό τους, λέγονται **πρώτοι**.
- Κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας που έχει περισσότερους από δυο παράγοντες λέγεται **σύνθετος**.
- Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.
- Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί (Ευκλείδης)
- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών (Θεμελιώδες Θεώρημα Αριθμητικής).

Δραστηριότητες

- (α) Να γράψετε τους παράγοντες των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 και 10.
(β) Ποιοι από τους αριθμούς αυτούς είναι πρώτοι;

Λύση:

Αριθμός	Παράγοντες
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	1, 5
6	1, 2, 3, 6
7	1, 7
8	1, 2, 4, 8
9	1, 3, 9
10	1, 2, 5, 10

Οι αριθμοί 2, 3, 5 και 7 έχουν ακριβώς δυο παράγοντες και επομένως είναι πρώτοι.

- Ποιοι από τους αριθμούς 18, 45 και 79 είναι πρώτοι;

Λύση:

Το 18 έχει παράγοντες τους αριθμούς 1, 2, 3, 6, 9 και 18. Επομένως, είναι σύνθετος
 Το 45 έχει παράγοντες τους αριθμούς 1, 3, 5, 9, 15 και 45. Επομένως, είναι σύνθετος
 Το 79 έχει παράγοντες τους αριθμούς 1 και 79, δηλαδή είναι πρώτος

- Να αναλυθεί ο αριθμός 90 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

$$\begin{array}{r|l}
 90 & 2 \\
 \hline
 & 45 \\
 & \hline
 & 15 \\
 & \hline
 & 3 \\
 & \hline
 & 5 \\
 & \hline
 & 1
 \end{array}
 \quad \text{ή} \quad
 \begin{array}{r|l}
 90 & 2 \\
 45 & 3 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\text{Άρα } 90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

- Ένας αριθμός A γράφεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Να βρείτε τον αριθμό.

Λύση:

$$A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$$

1. (α) Να βρείτε τους παράγοντες των αριθμών:

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

- (β) Ποιοι από τους αριθμούς αυτούς είναι πρώτοι;

2. Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός 99 είναι σύνθετος.

3. (α) Να βρείτε τους πρώτους παράγοντες του 40.

- (β) Να βρείτε τους πρώτους παράγοντες του 70.

- (γ) Να βρείτε τους κοινούς πρώτους παράγοντες του 40 και του 70.

4. Να βρείτε τον μικρότερο αριθμό που έχει πρώτους παράγοντες τους αριθμούς 2, 3 και 7.

5. Να βρείτε τους πρώτους δυο πρώτους αριθμούς μεγαλύτερους του 100.

6. Να βρείτε τον πρώτο κατά σειρά πρώτο αριθμό μεγαλύτερο του 200.

7. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι το 100. Να βρείτε ένα τρόπο για να χωρίσετε τους πρώτους αριθμούς από τους σύνθετους αριθμούς (**Κόσκινο του Ερατοσθένη**). [μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο <http://www.vex.net/~trebla/numbertheory/eratosthenes.html>]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

8. Να γράψετε τους αριθμούς ως γινόμενο πρώτων παραγόντων:

- | | | |
|---------|--------|----------|
| (α) 62 | (β) 64 | (γ) 82 |
| (δ) 320 | (ε) 90 | (στ) 120 |
| (ζ) 54 | (η) 38 | (θ) 1000 |

9. Ένας αριθμός γράφεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. Να βρείτε τον αριθμό.

10. (α) Να αναλύσετε τους όρους της ακολουθίας 2, 4, 8, 16, 32, ... σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

(β) Να γράψετε τους επόμενους δυο όρους της ακολουθίας σε μορφή δύναμης.

(γ) Να γράψετε τους επόμενους τρεις όρους της ακολουθίας 3, 9, 27, ... σε μορφή δύναμης.

11. Να βρείτε δυο φυσικούς αριθμούς που δεν είναι πολλαπλάσια του 10 έτσι ώστε:

(α) Το γινόμενό τους είναι 1000.

(β) Το γινόμενό τους είναι 1000000.

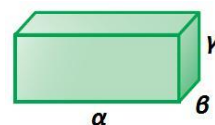
12. Να βρείτε τον αριθμό:

(α) Είναι ο μικρότερος μονοψήφιος περιττός πρώτος αριθμός.

(β) Τα δυο ψηφία του διψήφιου αυτού αριθμού είναι τα ίδια. Το γινόμενο των ψηφίων του δεν είναι σύνθετος αριθμός.

(γ) Είναι ο μοναδικός περιττός διψήφιος σύνθετος αριθμός μικρότερος του 20.

13. Δίδυμοι πρώτοι λέγονται δυο πρώτοι αριθμοί που είναι διαδοχικοί περιττοί αριθμοί. Για παράδειγμα οι 3 και 5, οι 5 και 7 και οι 11 και 13. Να βρείτε όλους τους δίδυμους πρώτους μικρότερους του 100.
14. Να βρείτε όλες τις δυνατές διαστάσεις (φυσικοί αριθμοί) ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με όγκο 357 κ.μ. (κυβικές μονάδες).
15. Να βρείτε δυο πρώτους αριθμούς το άθροισμα των οποίων είναι περιττός αριθμός.
16. Ο Γκόλτπαχ (Goldbach 1690 - 1724) διετύπωσε τον ισχυρισμό ότι κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο πρώτων αριθμών. Να δείξετε τον ισχυρισμό αυτό για τους άρτιους αριθμούς από το 32 μέχρι το 62.



Ιδιότητες των Διαιρετών

Διερεύνηση

1. Στο λογαριασμό τηλεφώνου μιας εταιρείας φαίνεται πως τον προηγούμενο μήνα ο αριθμός των κλήσεων ήταν 3576. Ο αριθμός φαίνεται υπερβολικός στο διευθυντή της εταιρείας, ο οποίος θέλει να βρει πόσα τηλεφωνήματα αναλογούν στον καθένα από τους 12 υπαλλήλους. Παρατηρεί πως ο αριθμός των κλήσεων διαιρείται ακριβώς με τον αριθμό των υπαλλήλων. Πιο κάτω φαίνεται ο τρόπος που εργάστηκε.

$$\left. \begin{array}{l} 3576 = 3600 - 24 \\ 3600 = 300 \cdot 12 \\ 24 = 2 \cdot 12 \end{array} \right\} \Rightarrow 3576 = 298 \cdot 12$$

- ✓ Να ερμηνεύσετε τον τρόπο υπολογισμού του διευθυντή.
 - ✓ Αν ο αριθμός των κλήσεων ήταν 3648, να εισηγηθείτε έναν παρόμοιο τρόπο και να εξετάσετε κατά πόσο διαιρείται ακριβώς με τον αριθμό των υπαλλήλων. Ποιο είναι το πηλίκο της διαίρεσης;
2. Μια πλατφόρμα άντλησης φυσικού αερίου θα στηθεί στη θάλασσα σε σημείο που το βάθος είναι 2660 m. Οι κολώνες της βάσης αποτελούνται από προκατασκευασμένα τμήματα ανοξείδωτου χάλυβα μήκους 42m. Τα προκατασκευασμένα κομμάτια κατασκευάζονται από μικρότερα κομμάτια χάλυβα μήκους 7 m το καθένα.
- ✓ Πόσα κομμάτια μήκους 7 m χρειάζονται για την κατασκευή του κάθε προκατασκευασμένου τμήματος των 42m;



- ✓ Να βρείτε τον αριθμό των τμημάτων μήκους 42 m που θα χρειαστούν για την κατασκευή της κάθε κολόνας.
- ✓ Αφού τοποθετηθούν όλα τα τμήματα μήκους 42 m , πόσα επιπλέον κομμάτια των 7 m θα χρειαστούν, για να ολοκληρωθεί η κατασκευή της κάθε κολόνας;
- ✓ Να βρείτε το συνολικό αριθμό των κομματιών μήκους 7 m που θα χρειαστούν για την κατασκευή της κάθε κολόνας με δυο τρόπους.

Τι πρέπει να ξέρετε

Μερικές από τις ιδιότητες των διαιρετών είναι οι ακόλουθες:

- **Αν ένας αριθμός διαιρεί έναν άλλο, θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του,** δηλαδή, αν $\alpha \mid \beta$, $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha \mid \kappa \cdot \beta$ για οποιαδήποτε τιμή του φυσικού αριθμού κ .
Απόδειξη:
Ο α διαιρεί τον β άρα υπάρχει φυσικός αριθμός λ , τέτοιος ώστε $\beta = \lambda \alpha$.
 $\kappa \cdot \beta = \kappa \cdot (\lambda \alpha) = (\kappa \lambda) \cdot \alpha$. Άρα $\alpha \mid \kappa \cdot \beta$.
- **Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί δύο άλλους, θα διαιρεί το άθροισμα και τη διαφορά τους,** δηλαδή, αν α, β, γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$, $\beta > \gamma$, τέτοιοι ώστε $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (\beta + \gamma)$ και $\alpha \mid (\beta - \gamma)$

Απόδειξη:

Ο αριθμός α διαιρεί τον β . Άρα υπάρχει φυσικός αριθμός κ τέτοιος ώστε $\beta = \kappa \cdot \alpha$
Ο αριθμός α διαιρεί τον γ . Άρα υπάρχει φυσικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\gamma = \lambda \cdot \alpha$
Επομένως, $\beta + \gamma = \kappa \cdot \alpha + \lambda \cdot \alpha = (\kappa + \lambda) \cdot \alpha$. Άρα ο $\beta + \gamma$ είναι πολλαπλάσιο του α , δηλαδή διαιρεί τον $\beta + \gamma$, άρα ισχύει ότι $\alpha \mid (\beta + \gamma)$.
Επομένως, $\beta - \gamma = \kappa \cdot \alpha - \lambda \cdot \alpha = (\kappa - \lambda) \cdot \alpha$. Άρα ο $\beta - \gamma$ είναι πολλαπλάσιο του α , δηλαδή διαιρεί τον $\beta - \gamma$. Άρα ισχύει ότι $\alpha \mid (\beta - \gamma)$.

- **Αν $\alpha, \beta \neq 0$ και $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid \gamma$.**

Απόδειξη. Αφού $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \gamma$, τότε υπάρχουν δύο φυσικοί αριθμοί κ, λ , τέτοιοι ώστε $\beta = \kappa \cdot \alpha$ και $\gamma = \lambda \cdot \beta$.
Αυτό σημαίνει όμως ότι $\gamma = \lambda \cdot \beta = \lambda \cdot (\kappa \cdot \alpha) = (\lambda \kappa) \cdot \alpha$.
Άρα, $\alpha \mid \gamma$, αφού $\kappa \lambda$ είναι φυσικός αριθμός.

- **Αν ένας αριθμός διαιρεί δύο άλλους, θα διαιρεί και το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου διά του μικρού αριθμού.**

Απόδειξη. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$ και ισχύει $\beta > \gamma$, τότε υπάρχουν αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\beta = \kappa \cdot \alpha$ και $\gamma = \lambda \cdot \alpha$.
Ισχύει από την ευκλείδεια διαίρεση για τους αριθμούς β, γ δηλαδή $\beta = \gamma \cdot \pi + \nu$, όπου π, ν φυσικοί αριθμοί με $\nu < \gamma$.
Από τη σχέση $\beta = \gamma \cdot \pi + \nu$ έχουμε ότι $\kappa \cdot \alpha = \lambda \cdot \alpha \cdot \pi + \nu$ που μας δίνει $\nu = \alpha(\kappa - \lambda \pi)$, δηλαδή το ν είναι πολλαπλάσιο του α , οπότε $\alpha \mid \nu$.

Δραστηριότητες

- Να εξετάσετε αν ο αριθμός 8 διαιρεί τον αριθμό 400 000.

Λύση:

Ο αριθμός 400 000 είναι πολλαπλάσιο του 40 αφού

$$400\,000 = 40 \cdot 10\,000$$

Ο αριθμός 8 διαιρεί το 40, άρα διαιρεί και το πολλαπλάσιο του 400 000.

- Να εξεταστεί αν ο αριθμός 24 διαιρεί τον αριθμό 2472.

Λύση:

Ο αριθμός 2472 γράφεται $(2400 + 72)$.

Ο αριθμός 24 διαιρεί και το 2400 και το 72, άρα διαιρεί και το άθροισμά τους 2472.

1. Να βρείτε τα σύνολα των διαιρετών των αριθμών:

(α) 16

(β) 30

(γ) 54

2. Να βρείτε το σύνολο των πολλαπλασίων του 5 που είναι μικρότερα από το 60.

3. Να εξετάσετε ποια από τα πιο κάτω αθροίσματα και διαφορές διαιρούνται με το 23.

(α) $4600 + 69$

(β) $230\,000 + 26$

(γ) $2300 - 69$

(δ) $6900 - 46$

4. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω αριθμοί διαιρούνται με το 14.

(α) 2814

(β) 2818

(γ) 14 042

5. Να αποδείξετε, με αριθμητικό παράδειγμα (αντιπαράδειγμα), ότι οι πιο κάτω προτάσεις δεν ισχύουν για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

(α) Αν $\alpha \mid \gamma$ και $\beta \mid \gamma$ τότε $(\alpha + \beta) \mid \gamma$

(β) Αν $\alpha \mid \gamma$ και $\beta \mid \gamma$ τότε $\alpha \cdot \beta \mid \gamma$

6. Να αποδείξετε ότι, αν α, β, γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$, $\beta > \gamma$, τέτοιοι ώστε $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (\kappa\beta + \lambda\gamma)$ όπου κ, λ φυσικοί αριθμοί.

7. Σχηματίζουμε έναν πίνακα με αριθμούς, όπως φαίνεται παρακάτω:

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
...	...	...	...	...

Να βρείτε σε ποια στήλη θα βρίσκονται οι αριθμοί 38, 150, 2012.

Κριτήρια Διαιρετότητας

Εξερεύνηση

Μια βιοτεχνία κατασκευάζει παιδικά καθίσματα για το αυτοκίνητο. Κάθε κάθισμα χρειάζεται 8 ιμάντες, για να προσδεθεί στο αυτοκίνητο. Σε κάθε συσκευασία τοποθετούνται ακριβώς 8 ιμάντες. Στην αποθήκη της βιοτεχνίας για τους μήνες Οκτώβριο, Νοέμβριο και Δεκέμβριο αναφέρονται ως απόθεμα σε ιμάντες οι αριθμοί:



Οκτώβριος	Νοέμβριος	Δεκέμβριος
1352256	1369104	1237148

- ✓ Να ελέγξετε, αν με τους αριθμούς αυτούς ικανοποιείται ο στόχος της εταιρείας για παραγωγή τόσων ιμάντων όσων ακριβώς χρειάζονται.
- ✓ Να ελέγξετε, αν ο αριθμός 1352256 διαιρείται με το 2, 3, 4, 5, 9 και 10 (να εισηγηθείτε διάφορους τρόπους)

Διερεύνηση

1. Να χρησιμοποιήσετε έναν πίνακα φυσικών αριθμών, όπως τον παρακάτω.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

(α)

- ✓ Να βάλετε x σε όλους τους αριθμούς που διαιρούνται με το 2.
- ✓ Να κυκλώσετε όλους τους αριθμούς που διαιρούνται με το 3.
- ✓ Να υπογραμμίσετε όλους τους αριθμούς που διαιρούνται με το 5.
- ✓ Να σημειώσετε με ✓ σε όλους τους αριθμούς που διαιρούνται με το 10.

(β)

- ✓ Να περιγράψετε το μοτίβο των αριθμών που διαιρούνται με το 2, 5 και 10.
- ✓ Να περιγράψετε το μοτίβο των αριθμών που διαιρούνται με το 3 (να μελετήσετε τα ψηφία των αριθμών).

2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι επόμενες δυο ομάδες αριθμών διαιρούνται με το 4.

(α)	120, 248, 396, 1016, 3308, 5544, 9992
(β)	121, 246, 398, 1017, 3306, 5544, 9994

- ✓ Τι κοινό έχουν οι αριθμοί της (α) ομάδας που δεν το έχουν οι αριθμοί της (β) ομάδας;

3. Να εξετάσετε κατά πόσο οι επόμενες δυο ομάδες αριθμών διαιρούνται με το 3.

(α)	6, 12, 24, 57, 81, 111, 300, 312, 651, 777
(β)	8, 13, 25, 56, 80, 112, 301, 313, 653, 778

- ✓ Τι κοινό έχουν οι αριθμοί της (α) ομάδας που δεν το έχουν οι αριθμοί της (β) ομάδας;

Τι πρέπει να ξέρετε

Κριτήρια διαιρετότητας

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 10, 100, 1000, ... αν τελειώνει τουλάχιστον σε ένα, δύο, τρία, κ.ο.κ. μηδενικά, αντίστοιχα.
- Ένα φυσικός αριθμός διαιρείται ακριβώς με το 2, αν τελειώνει σε 0, 2, 4, 6, ή 8. Δηλαδή, οι άρτιοι αριθμοί διαιρούνται με το 2.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5, αν τελειώνει σε 0 ή 5.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4, αν τα τελευταία δύο ψηφία του διαιρούνται με το 4 ή είναι δύο μηδενικά.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 25, αν τα τελευταία δύο ψηφία του διαιρούνται με το 25 ή είναι δύο μηδενικά.
- Ένας φυσικός αριθμός θα διαιρείται με το 3, αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι ένας αριθμός που διαιρείται με το 3.
- Ένας φυσικός αριθμός θα διαιρείται με το 9, αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι ένας αριθμός που διαιρείται με το 9.

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Από τους αριθμούς 325, 2310, 6302 και 9540 να βρείτε αυτούς που διαιρούνται:

(α) με το 2	(β) με το 3	(γ) με το 4
(δ) με το 5	(ε) με το 25	(στ) με το 2 και το 9

Λύση:

- (α) Οι αριθμοί 2310, 6302, και 9540 διαιρούνται με το 2.
- (β) Οι αριθμοί 2310, και 9540 διαιρούνται με το 3.
- (γ) Ο αριθμός 9540 διαιρείται με το 4.

(δ) Οι αριθμοί 325, 2310 και 9540 διαιρούνται με το 5.

(ε) Ο αριθμός 325 διαιρείται με το 25.

(στ) Ο αριθμός 9540 διαιρείται με το 2 και το 9.

- Να συμπληρώσετε τα τετραγωνάκια, ώστε ο αριθμός $\square 75 \square$ να διαιρείται ταυτόχρονα με το 3 και το 4:

Λύση:

Για να διαιρείται ο αριθμός $\square 75 \square$ με το 4 θα πρέπει τα δύο τελευταία ψηφία του να διαιρούνται με το 4. Έτσι στο τελευταίο τετραγωνάκι (μονάδες) μπορούμε να έχουμε τα ψηφία 2 ή 6.

Για να διαιρείται ο αριθμός με το 3 το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού πρέπει να διαιρείται με το 3.

- (i) Αν το τελευταίο ψηφίο του αριθμού είναι το 2, τότε έχουμε ότι $7 + 5 + 2 = 14$. Άρα πρέπει το πρώτο ψηφίο του αριθμού να είναι 1 ή 4. Έτσι ώστε να προκύψει άθροισμα που είναι πολλαπλάσιο του 3.

Ο αριθμός θα είναι ο $\square 1 75 \square 2$ ή $\square 4 75 \square 2$.

- (ii) Αν το τελευταίο ψηφίο του αριθμού είναι το 6, τότε έχουμε $7 + 5 + 6 = 18$. Άρα πρέπει το πρώτο ψηφίο (χιλιάδων) του αριθμού να είναι 3 ή 6 ή 9.

Επομένως ο αριθμός θα είναι ο $\square 3 75 \square 6$ ή $\square 6 75 \square 6$ ή $\square 9 75 \square 6$.

- Να δείξετε το κριτήριο διαιρετότητας με το 3 για τον αριθμό 8412.

Λύση:

$$8412 = 8 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 2$$

$$10 = 9 + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = \text{πολ. } 3 + 1$$

$$100 = 99 + 1 = 3 \cdot 33 + 1 = \text{πολ. } 3 + 1$$

$$1000 = 999 + 1 = 3 \cdot 333 + 1 = \text{πολ. } 3 + 1$$

Με αντικατάσταση έχουμε ότι:

$$8 \cdot 1000 = 8(\text{πολ. } 3 + 1) = 8 \text{ πολ. } 3 + 8 = \text{πολ. } 3 + 8$$

$$4 \cdot 100 = 4(\text{πολ. } 3 + 1) = 4 \text{ πολ. } 3 + 4 = \text{πολ. } 3 + 4$$

$$1 \cdot 10 = 1(\text{πολ. } 3 + 1) = 1 \text{ πολ. } 3 + 1 = \text{πολ. } 3 + 1$$

$$\begin{array}{r} \underline{+2} \qquad \qquad \qquad \underline{+2} \\ 8412 \qquad \qquad \qquad \text{πολ. } 3 + (8 + 4 + 1 + 2) \end{array}$$

Ο αριθμός 8412 μπορεί να γραφεί ως: $8412 = \text{πολ. } 3 + (8 + 4 + 1 + 2)$.

Παρατηρούμε ότι για να διαιρείται με το 3 θα πρέπει το άθροισμα $(8 + 4 + 1 + 2)$ να είναι πολλαπλάσιο του 3.

1. Να εξετάσετε κατά πόσο οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες.
 (α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού είναι πρώτος αριθμός.
 (β) Ένας αριθμός που διαιρείται με το 9 διαιρείται και με το 3.
 (γ) Δύο περιττοί αριθμοί είναι πάντοτε πρώτοι μεταξύ τους.
2. Από τους αριθμούς 765, 1520, 4404 και 3850, να βρεθούν αυτοί που διαιρούνται με:
 (α) με το 2 (β) με το 3 (γ) με το 4 (δ) με το 5
 (ε) με το 9 (στ) με το 25
3. Δίνεται ο αριθμός $12 \square 6$ ο οποίος διαιρείται με το 4 και το 9.
 (α) Να συμπληρώσετε το $\square$ με το ψηφίο που λείπει.
 (β) Να αναλύσετε τον αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να τον γράψετε ως τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού.
4. Η ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχει την μορφή $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \alpha$, όπου το α είναι πρώτος αριθμός. Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός αυτός διαιρείται:
 (α) με το 12 (β) με το 15 (γ) με το 21
5. Να συμπληρώσετε τα κενά τετράγωνα με κατάλληλα ψηφία, ώστε ο αριθμός
 (α) $43\square$ να διαιρείται συγχρόνως με το 3 και το 5,
 (β) $9\square 3$ να διαιρείται με το 9,
 (γ) $837\square$ να διαιρείται συγχρόνως με το 5 και το 9,
 (δ) $7633\square$ να διαιρείται συγχρόνως με το 2 και 3,
 (ε) $38\square 7\square$ να διαιρείται συγχρόνως με το 9 και το 25
6. Να διατυπώσετε ένα κριτήριο διαιρετότητας με το 8 (σκεφτείτε τα κριτήρια με το 2 και το 4).
7. Να δείξετε ότι ο αριθμός 126 διαιρείται με το 9. (Να γράψετε τον αριθμό σε ανηγμένη μορφή και ακολούθως να χρησιμοποιήσετε Ευκλείδεια διαίρεση για να γράψετε τις εκατοντάδες και δεκάδες ως πηλίκο του 9).
8. Να εξετάσετε κατά πόσο ο αριθμός 787 είναι πρώτος ή σύνθετος;
9. Χωρίς να κάνετε τη διαίρεση, εξετάστε αν η διαίρεση $35685 \div 45$ είναι τέλεια διαίρεση.
10. Να βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς με γινόμενο 48 και με το μικρότερο δυνατό άθροισμα.
11. Να βρείτε τρεις φυσικούς αριθμούς με άθροισμα 13, με γινόμενο 36 και ο μικρότερος να είναι περιττός.

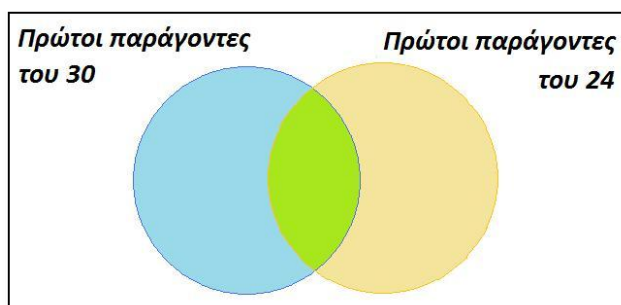
Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) & Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) φυσικών αριθμών

Εξερεύνηση

1. Ο Κώστας τοποθετεί τις φωτογραφίες συμμαθητών του σε ένα πλαίσιο διαστάσεων $36 \times 60 \text{ cm}$. Οι φωτογραφίες είναι τετράγωνες και έχουν όλες το ίδιο μήκος πλευράς που είναι φυσικός αριθμός. Τοποθετούνται η μια δίπλα στην άλλη, χωρίς να υπάρχει κενό ανάμεσά τους αλλά και χωρίς να καλύπτει η μια την άλλη.
 - ✓ Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό μήκος της πλευράς της κάθε τετράγωνης φωτογραφίας.
 - ✓ Πόσες τετράγωνες φωτογραφίες με τη μεγαλύτερη δυνατή πλευρά μπορεί να τοποθετήσει ο Κώστας μέσα στο πλαίσιο;
2. Ένα τετραγωνικό δωμάτιο θα καλυφθεί με κεραμικά πλακάκια διαστάσεων $35 \times 45 \text{ cm}$. Το δωμάτιο καλύπτεται εξολοκλήρου με τα κεραμικά πλακάκια, χωρίς να χρειαστούν οποιαδήποτε κοψίματα.
 - ✓ Να βρείτε τις διαστάσεις του μικρότερου δωματίου που μπορεί να καλυφθεί με το κεραμικό αυτό, χωρίς να χρειαστούν κοψίματα.

Διερεύνηση

1. Να αναλύσετε τους αριθμούς 30 και 24 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να συμπληρώσετε το επόμενο διάγραμμα τοποθετώντας στους κύκλους τους πρώτους παράγοντες του κάθε αριθμού. Τους κοινούς πρώτους παράγοντες να τους τοποθετήσετε στην περιοχή που είναι κοινή για τους δυο κύκλους.



- ✓ Ποιοι αριθμοί βρίσκονται και στους δυο κύκλους;
- ✓ Να βρείτε το γινόμενο των αριθμών που βρίσκονται και στους δυο κύκλους.
- ✓ Να εξετάσετε, αν το γινόμενο είναι παράγοντας (διαιρέτης) των αριθμών 30 και 12.

- ✓ Να εξετάσετε, αν το γινόμενο των κοινών παραγόντων των αριθμών είναι ο μεγαλύτερος δυνατός κοινός παράγοντας (διαιρέτης) των αριθμών.
 - ✓ Πώς θα μπορούσε η ανάλυση των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων να αιτιολογήσει την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα;
2. Να αναλύσετε τους αριθμούς 924 και 240 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να συμπληρώσετε ένα διάγραμμα με τους πρώτους παράγοντες σε κύκλους, όπως στην προηγούμενη δραστηριότητα.
- ✓ Να πολλαπλασιάσετε τον μικρότερο από τους δυο αριθμούς με όλους τους πρώτους παράγοντες του 924 που δεν είναι παράγοντες του 240. Να γράψετε το γινόμενο σε μορφή γινομένου πρώτων παραγόντων.
 - ✓ Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το γινόμενο αυτό από το 240;
 - ✓ Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το γινόμενο αυτό από το 924;
 - ✓ Να εξετάσετε αν υπάρχει μικρότερος αριθμός από το γινόμενο αυτό που να είναι πολλαπλάσιο των αριθμών 924 και 240.
 - ✓ Πώς θα μπορούσε η ανάλυση των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων να αιτιολογήσει την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα;

Τι πρέπει να ξέρετε

- Δύο ή περισσότεροι φυσικοί αριθμοί μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** των αριθμών.
 - **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο ή περισσότερων αριθμών ονομάζεται το μικρότερο, μη μηδενικό, κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών αυτών.
 - Για να βρούμε το ΕΚΠ ή ΜΚΔ δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.
 - Ο **ΜΚΔ** είναι το γινόμενο των κοινών πρώτων παραγόντων με τον μικρότερο εκθέτη που εμφανίζεται στην ανάλυση των αριθμών σε πρώτους παράγοντες.
 - Το **ΕΚΠ** είναι το γινόμενο όλων των πρώτων παραγόντων με τον μεγαλύτερο εκθέτη που εμφανίζεται στην ανάλυση των αριθμών σε πρώτους παράγοντες.
 - Δύο φυσικοί αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** (ή σχετικά πρώτοι) αν ο ΜΚΔ είναι το 1.
 - Κάθε φυσικός αριθμός που είναι ίσος με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του λέγεται **τέλειος αριθμός**. (π.χ. ο αριθμός 6 είναι τέλειος $6 = 1 + 2 + 3$).
- [Από την εποχή του Πυθαγόρα (~500 π.Χ.) που πρώτος διατύπωσε τους τέλειους αριθμούς, μόνο 38 τέλειοι αριθμοί έχουν βρεθεί]

Δραστηριότητες

Παραδείγματα

- Δύο πλοία επισκέπτονται ένα νησάκι. Το πρώτο ανά 3 ημέρες, το δεύτερο ανά 4 ημέρες. Αν ξεκίνησαν από το νησάκι ταυτόχρονα, σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι του νησιού;

Λύση

Βρίσκουμε τα πολλαπλάσια των αριθμών 3 και 4.

Πολλαπλάσια του 3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	...
Πολλαπλάσια του 4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	...

Οι αριθμοί **12, 24, 36, ...** είναι κοινά πολλαπλάσια των αριθμών **3** και **4**. Επειδή, το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια είναι το **12**, γράφουμε: **ΕΚΠ(3, 4) = 12** Δηλαδή, ακριβώς μετά από 12 ημέρες θα ξαναβρεθούν τα δύο πλοία στο λιμάνι του νησιού και αυτό θα επαναλαμβάνεται κάθε 12 ημέρες.

- Να βρείτε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών 36, 48 και 60.

36	2	48	2	60	2
18	2	24	2	30	2
9	3	12	2	15	3
3	3	6	2	5	5
1		3	3	1	
		1			

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad 48 = 2^4 \cdot 3 \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Ο πιο πάνω τρόπος μπορεί να δοθεί και συνοπτικά με βάση το παρακάτω σχήμα.

36	48	60	2
18	24	30	2
9	12	15	2
9	6	15	2
9	3	15	3
3	1	15	3
1	1	5	5

Ο ΜΚΔ είναι το γινόμενο των κοινών διαιρετών (οι διαιρέτες που είναι σε κύκλο)

Το Ε.Κ.Π. είναι το γινόμενο όλων των διαιρετών. Επομένως,

$$ΜΚΔ(36, 48, 60) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12,$$

$$ΕΚΠ(36, 48, 60) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 16 \cdot 9 \cdot 5 = 720$$

1. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

Αριθμός α	Αριθμός β	$ΜΚΔ(\alpha, \beta)$	$ΕΚΠ(\alpha, \beta)$	$ΜΚΔ \cdot ΕΚΠ$	$\alpha \cdot \beta$
3	5				
4	6				
6	9				
8	12				
7	14				
10	15				

- (α) Να περιγράψετε το μοτίβο που δημιουργείται από τις τιμές του πίνακα.
- (β) Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στο γινόμενο των δυο αριθμών και το γινόμενο του ΜΚΔ και του ΕΚΠ;
2. Ο Γιάννης, ο Γιώργος και Κώστας τρέχουν σε έναν κυκλικό στίβο κατά την διάρκεια της προπόνησης τους. Ο Γιάννης μπορεί να κάνει το γύρο του στίβου σε 3 λεπτά, ο Γιώργος σε 6 λεπτά και ο Κώστας σε 4 λεπτά. Αν ξεκινήσουν και οι τρεις ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο, μετά από πόσα λεπτά θα βρεθούν στο ίδιο σημείο και πόσους γύρους θα έχει κάνει ο καθένας;
3. Να γράψετε τους αριθμούς 32, 48 και 80 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Στη συνέχεια να βρείτε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ τους.
4. Να βρεθεί πόσα το πολύ όμοια δέματα μπορούμε να κάνουμε με 108 τετράδια, 18 βιβλία και 54 μολύβια. Τι θα περιέχει το κάθε δέμα;
5. Να βρείτε για ποιους φυσικούς αριθμούς α ισχύει $Ε.Κ.Π.(4, \alpha) = 52$.
6. Ποια από τα παρακάτω ζευγάρια φυσικών αριθμών δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους;
- (α) 16 και 25 (β) 26 και 35 (γ) 36 και 45 (δ) 46 και 55
7. Να εξετάσετε κατά πόσο οι αριθμοί 1000 και 1323 είναι πρώτοι μεταξύ τους.
8. (α) Να βρείτε τον επόμενο μετά το 6 τέλει αριθμό.
(β) Θα μπορούσε ένας τέλει αριθμός να είναι πρώτος;
9. Να αναλυθούν οι αριθμοί 2520, 2940, 3780 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών.
10. Να γράψετε τρία ζευγάρια φυσικών αριθμών, που είναι πρώτοι μεταξύ τους. Να βρείτε το ΕΚΠ για κάθε ζευγάρι αριθμών. Τι παρατηρείτε; Να διατυπώσετε ένα γενικό κανόνα.
11. Σε ένα εργοστάσιο υπάρχουν 60 κουτιά από χυμούς. Όταν συσκευάζονται τα κουτιά αυτά ανά 15, 20 και 32, δεν περισσεύει κανένα κουτί. Να υπολογίσετε το ψηφίο .

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να βρείτε το μικρότερο φυσικό αριθμό α για τον οποίο οι αριθμοί:
(α) $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2$ είναι όλοι σύνθετοι.
(β) $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \alpha + 3$ είναι όλοι σύνθετοι.
2. Να εξετάσετε κατά πόσο ο αριθμός 263 είναι πρώτος ή σύνθετος;
3. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 28, 36, 60.
4. Να γράψετε ένα δεκαψήφιο σύνθετο αριθμό, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τα ψηφία 0, 2, 4, 5, 8.
5. Να βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς με γινόμενο 48 που να έχουν το μικρότερο δυνατό άθροισμα.
6. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις παρακάτω προτάσεις βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

i. Το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών είναι πρώτος.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
ii. Το άθροισμα δύο σύνθετων αριθμών είναι σύνθετος.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
iii. Το γινόμενο δύο πρώτων αριθμών είναι πρώτος.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
iv. Το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε σύνθετων αριθμών είναι σύνθετος.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
7. Να αναλύσετε τους αριθμούς 36 και 315 σε γινόμενα πρώτων παραγόντων και να βρείτε όλους τους διαιρέτες τους.
8. Ένας ανθοπώλης έχει λιγότερα από 450 τριαντάφυλλα. Έχει υπολογίσει ότι αν θα φτιάξει όλες τις ανθοδέσμες με 7 τριαντάφυλλα δεν περισσεύει κανένα. Το ίδιο συμβαίνει, αν φτιάξει ανθοδέσμες των 9 ή των 12 τριαντάφυλλων. Πόσα τριαντάφυλλα έχει ο ανθοπώλης;
9. Να αποδειχθεί ότι όταν έχουμε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, ο ένας από τους τρεις είναι πολλαπλάσιο του 3.
10. Ο Ευκλείδης εισηγήθηκε τον επόμενο αλγόριθμο για τον υπολογισμό του $ΜΚΔ$ δυο φυσικών αριθμών:

Αν α και β με $\alpha > \beta$ είναι δυο αριθμοί των οποίων ψάχνουμε το $ΜΚΔ$, τότε διαιρούμε τον α δια του β και παίρνουμε πηλίκο π_1 και υπόλοιπο v_1 . Αν το υπόλοιπο $v_1 > 0$ τότε διαιρούμε τον β δια του v_1 και παίρνουμε πηλίκο π_2 και υπόλοιπο v_2 . Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι που το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης να είναι ίσο με μηδέν. Τότε $ΜΚΔ(\alpha, \beta)$ είναι το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο της διαδικασίας αυτής.

(α) Να δείξετε ότι $ΜΚΔ(\alpha, \beta) = ΜΚΔ(\beta, v_1)$, όπου v_1 το υπόλοιπο της διαίρεσης του α δια του β [Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των διαιρετών].

(β) Να συμπεράνετε την αλήθεια του Ευκλείδειου αλγόριθμου για τον $ΜΚΔ(\alpha, \beta)$.

