

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Πέμπτη, 30/5/2013**

8:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ
Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο
που αποτελείται από δυο (2) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int (x^4 - \eta\mu 3x + 5) dx$.
2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta\mu x}{e^x - 1}$.
3. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $y = 4x^3 - 12x^2$, αν υπάρχουν.
4. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με $\alpha > \beta > 0$. Αν η εστιακή απόσταση $EE' = 8$ μονάδες και η εκκεντρότητα της είναι $\frac{4}{5}$, να βρείτε τις τιμές του α και του β και να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης.
5. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές των κ και λ , για τις οποίες ισχύει $A^2 - \kappa A + \lambda I = (0)$, όπου I και (0) είναι ο μοναδιαίος και ο μηδενικός 2×2 πίνακας αντίστοιχα.
6. Δίνονται τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5. Να βρείτε:
(α) Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία αυτά αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων.
(β) Πόσοι από τους πιο πάνω αριθμούς είναι άρτιοι.

7. Δίνεται η υπερβολή $xy = 2$ και το σημείο της $A(1,2)$.
- (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της υπερβολής στο σημείο A είναι $x - 2y + 3 = 0$.
- (β) Η κάθετη της υπερβολής στο σημείο A τέμνει ξανά την υπερβολή στο σημείο B. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο την AB.
8. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω .
- (α) Να γράψετε πότε τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.
- (β) Να αποδείξετε ότι $P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$.
9. Να υπολογίσετε:
- (α) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \eta\mu x$, $y = \sigma\upsilon\nu x$, με $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, και τον άξονα Oy .
- (β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα Ox .
10. Συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R , παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ και η καμπύλη της περνά από το σημείο $A(0,1)$. Αν ισχύει $\int_0^2 (2f'(x) + xf''(x)) dx = 3$, να υπολογίσετε το $f(2)$.

ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{x-2}{x^2+x-2}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης, να την παραστήσετε γραφικά.
2. Δίνεται η καμπύλη $y = e^{-x}$ και σημείο της $A(\kappa, \lambda)$, $\kappa \geq 0$.
- (α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A.
- (β) Αν η εφαπτομένη στο σημείο A τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy σε σημεία B και Γ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το εμβαδόν $E(\kappa)$ του τριγώνου $OB\Gamma$ (O η αρχή των αξόνων) είναι $E(\kappa) = \frac{1}{2} e^{-\kappa} (\kappa + 1)^2$.
- (γ) Να βρείτε την τιμή του κ έτσι ώστε το εμβαδόν $E(\kappa)$ του τριγώνου $OB\Gamma$ να είναι μέγιστο.

3. Έξι παντρεμένα ζευγάρια βρίσκονται σε μια αίθουσα. Επιλέγουμε τυχαία τέσσερα άτομα από αυτά. Να βρείτε:
- (α) Την πιθανότητα να επιλεγούν παντρεμένα ζευγάρια μόνο.
 (β) Την πιθανότητα να μην επιλεγεί κανένα παντρεμένο ζευγάρι.
 (γ) Την πιθανότητα να επιλεγεί ένα μόνο παντρεμένο ζευγάρι.
4. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ με εστία E και τυχαίο σημείο της $A(t^2, 2t)$, $t \neq 0$. Φέρουμε ευθεία κάθετη στην AE στο σημείο E , η οποία τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο B .
- (α) Να δείξετε ότι η BA είναι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο A .
 (β) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Γ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $AE\Gamma$, καθώς το A κινείται πάνω στην παραβολή.
5. Δίνονται δύο συνεχείς συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ και $g: R \rightarrow R$, τέτοιες ώστε $f(x) + f(-x) = g(x)$, $\forall x \in R$.
- (α) Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $x = -u$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a g(x)dx$.
- (β) Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e\varphi^2 x}{1+3^x} dx$.

----- Τ Ε Λ Ο Σ Ε Ξ Ε Τ Α Σ Η Σ -----