ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 31/5/2011
8:30 – 11:30

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int\left(6\chi^4 - 2\sqrt{\chi}\right)d\chi$.

<u>Λύση:</u>

$$\int \left(6\chi^4 - 2\sqrt{\chi}\right)d\chi = \frac{6\chi^5}{5} - \frac{4}{3}\chi^{\frac{3}{2}} + c$$

2. Δίνεται ο κύκλος: $\chi^2 + \psi^2 - 6\chi + 8\psi + 9 = 0$.
   a) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου.
   b) Να γράψετε παραμετρικές εξισώσεις για τον πιο πάνω κύκλο.

<u>Λύση:</u>

a) $2g = -6 \Leftrightarrow g = -3$ και $2f = 8 \Leftrightarrow f = 4$, άρα κέντρο του κύκλου $K\left(-g, -f\right) \Rightarrow K\left(3, -4\right)$

και ακτίνα $R = \sqrt{g^2 + f^2 - c} \Leftrightarrow R = \sqrt{\left(-3\right)^2 + 4^2 - 9} \Leftrightarrow R = 4$.

b) Ο κύκλος είναι της μορφής $\left(\chi - 3\right)^2 + \left(\psi + 4\right)^2 = 16$, άρα παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου είναι:

$$\left.\begin{array}{l} \chi - 3 = 4\sigma\upsilon\nu\theta \\ \psi + 4 = 4\eta\mu\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \chi = 3 + 4\sigma\upsilon\nu\theta \\ \psi = -4 + 4\eta\mu\theta \end{array}.$$

3. Δίνεται ο πίνακας: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Να δείξετε ότι ο αντίστροφος πίνακας του A είναι: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

   b) Να βρείτε τον πίνακα: $B = 2A - 3A^{-1}$.

   <u>Λύση:</u>

   α) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1$

   $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   β) $B = 2A - 3A^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$

   $$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Να δώσετε τον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, ορισμένης στο R.

   Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο: $f(\chi) = \frac{\alpha\chi + 5}{2\chi - \beta}$, $\alpha, \beta \in R$, έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $\psi = 1$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $\chi = -2$, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β.

   <u>Λύση:</u>

   Ορισμός: Αν για μια συνάρτηση $\psi = f(\chi)$, $\lim_{\chi \to +\infty} f(\chi) = \alpha$ ή/και $\lim_{\chi \to -\infty} f(\chi) = \alpha$ τότε η ευθεία $\psi = \alpha$ ονομάζεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

   Αφού $\psi = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη θα έχουμε

   $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\alpha\chi + 5}{2\chi - \beta} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\alpha}{2} = 1, \text{ άρα } \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 2$$

   Επειδή $\chi = -2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη θα έχουμε

   $$\lim_{\chi \to -2^+} \frac{2\chi + 5}{2\chi - \beta} = \pm\infty \Rightarrow \frac{1}{-4 - \beta} = \pm\infty, \text{ άρα } -4 - \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -4.$$

5. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ιδίου δειγματικού χώρου Ω με: $P(A')=\frac{3}{4}$, $P(A/B)=\frac{1}{4}$ και $P(B/A)=\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες: $P(B)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ και $P(A'\cap B')$, και να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

Λύση:

- $P(A')=\frac{3}{4}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}$

- $P(B/A)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{2}\Rightarrow P(A)=2\cdot P(A\cap B)$

  $\Rightarrow 2\cdot P(A\cap B)=\frac{1}{4}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{8}$

- $P(A/B)=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{4}$

  $\Rightarrow P(B)=4\cdot P(A\cap B)\Rightarrow P(B)=4\cdot\frac{1}{8}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}$

- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

- $P(A'\cap B')=P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=\frac{3}{8}$

- $P(A\cap B)\neq 0\Rightarrow$ τα ενδεχόμενα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

6. Δίνεται η λέξη “ΦΑΕΙΝΗ”. Να βρείτε:
   a) πόσοι είναι όλοι οι αναγραμματισμοί της πιο πάνω λέξης, και
   b) σε πόσους από αυτούς τους αναγραμματισμούς **δεν** περιέχεται η λέξη “ΝΕΑ”.

Λύση:

α) Φ Α Ε Ι Ν Η

$M_6=6!=720$

β) ΝΕΑ Φ Ι Η

$M_4=4!=24$

$M_6-M_4=720-24=696$

7. α) Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

β) Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση: $\frac{χ^2}{9}+\frac{ψ^2}{4}=1$ και εστίες Ε και Ε΄.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της έλλειψης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου ΤΔΕ, αν η ΤΔ είναι εστιακή χορδή που περνά από την Ε΄.

Λύση:

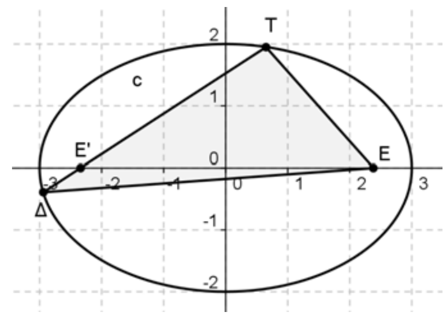
α) Ορισμός

Έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος σημείου του επιπέδου, που κινείται έτσι ώστε οι αποστάσεις του από δύο σταθερά σημεία Ε και Ε΄ του επιπέδου να έχουν άθροισμα σταθερό.

Δηλαδή αν Τ είναι τυχαίο σημείο της έλλειψης και 2α (α>0) το σταθερό άθροισμα τότε (ΤΕ)+(ΤΕ΄)=2α.

β) $α=3$ και $β=2$ $(α>β)$. Από τον ορισμό της έλλειψης θα έχουμε:

$$Π_{\triangle ΤΔΕ}=ΤΕ+ΤΔ+ΔΕ=(ΤΕ+ΤΕ')+(ΔΕ'+ΔΕ)=$$
$$=2α+2α=4α=4\cdot 3=12$$



8. Δίνεται η συνάρτηση: $f(χ)=\frac{2}{χ}, χ>0$. Έστω Α το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες με εξισώσεις $χ=1$ και $χ=e^2$. Να βρείτε την ευθεία $χ=λ$ η οποία χωρίζει το χωρίο Α σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Λύση:

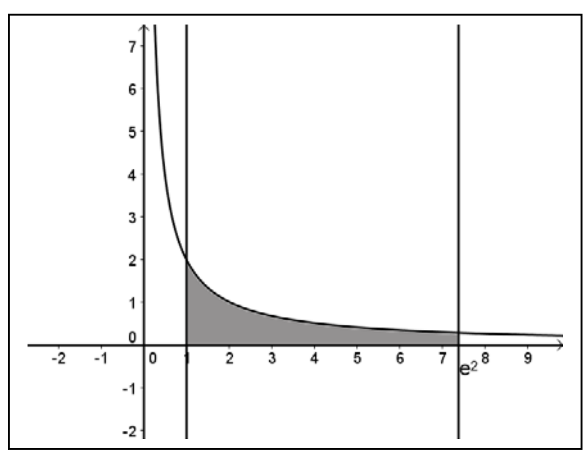
$$E=\int_1^{e^2} f(χ)dχ=\int_1^{e^2}\frac{2}{χ}dχ=[2\ln χ]_1^{e^2}$$

$$=2\left[\ln e^2-\ln 1\right]=2\cdot(2-0)=4\,τμ$$

$$E_λ=\frac{1}{2}E\Rightarrow\int_1^{λ} f(χ)dχ=2\Rightarrow\int_1^{λ}\frac{2}{χ}dχ=2$$

$$\Rightarrow[2\ln χ]_1^{λ}=2\Rightarrow 2[\ln λ-\ln 1]=2$$

$$\Rightarrow \ln λ=1\Rightarrow λ=e$$
$$\Rightarrow χ=e$$



9. Δίνεται συνάρτηση: $f(\chi)=\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta,\ \chi\in R$ και $\alpha\neq 0$. Αν η συνάρτηση f έχει τοπικά ακρότατα για $\chi=\chi_1$ και $\chi=\chi_2,\ \chi_1<\chi_2$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει σημείο καμπής για $\chi=\dfrac{\chi_1+\chi_2}{2}$.

<u>Λύση:</u>

<u>1^{ος} τρόπος</u>:

$f'(\chi)=3\alpha\chi^2+2\beta\chi+\gamma$ και $f''(\chi)=6\alpha\chi+2\beta$.

Η f παρουσιάζει ακρότατα για $\chi=\chi_1$ και $\chi=\chi_2,\ \chi_1<\chi_2$, από το θεώρημα του Fermat θα έχουμε: $f'(\chi_1)=0$ και $f'(\chi_2)=0$.

$\chi_1,\ \chi_2$ είναι ρίζες της $f' \Rightarrow \chi_1+\chi_2=-\dfrac{2\beta}{3\alpha}$.

$f''(\chi)=0\Rightarrow 6\alpha\chi+2\beta=0\Rightarrow \chi=-\dfrac{\beta}{3\alpha}$.

Η f'' αλλάζει πρόσημο δεξιά και αριστερά του $\chi=-\dfrac{\beta}{3\alpha}$,

επομένως η f παρουσιάζει σημείο καμπής για $\chi=-\dfrac{\beta}{3\alpha}\Rightarrow \chi=\dfrac{\chi_1+\chi_2}{2}$.

<u>2^{ος} τρόπος</u>:

$f'(\chi)=3\alpha\chi^2+2\beta\chi+\gamma$ και $f''(\chi)=6\alpha\chi+2\beta$.

Η f παρουσιάζει ακρότατα για $\chi=\chi_1$ και $\chi=\chi_2,\ \chi_1<\chi_2$, από το θεώρημα του Fermat θα έχουμε: $f'(\chi_1)=0$ και $f'(\chi_2)=0$.

$\chi_1,\ \chi_2$ είναι ρίζες της $f' \Rightarrow \chi_1+\chi_2=-\dfrac{2\beta}{3\alpha}$.

Η f' είναι πολυωνυμική συνάρτηση $\Rightarrow$ η f' είναι συνεχής στο $[\chi_1,\chi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (χ_1,χ_2).

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\chi\in(\chi_1,\chi_2):\ f''(\chi)=\dfrac{f'(\chi_2)-f'(\chi_1)}{\chi_2-\chi_1}$. Επομένως $f''(\chi)=\dfrac{0-0}{\chi_2-\chi_1}=0$

$f''(\chi)=0\Leftrightarrow 6\alpha\chi+2\beta=0\Leftrightarrow \chi=-\dfrac{\beta}{3\alpha}$.

Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $\chi=-\dfrac{\beta}{3\alpha}$ για κάθε $\alpha\neq 0$,

επομένως η f παρουσιάζει σημείο καμπής για $\chi=-\dfrac{\beta}{3\alpha}\Rightarrow \chi=\dfrac{\chi_1+\chi_2}{2}$.

10. Δίνεται ο κύκλος: $\chi^2+\psi^2=9$ και σημείο του $A(\chi_1,\psi_1)$.

a) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α είναι: $\chi_1\chi+\psi_1\psi=9$.

b) Έστω ότι $B(\chi_2,\psi_2)$ είναι ένα άλλο σημείο του κύκλου. Αν οι εφαπτόμενες του κύκλου στα Α και Β τέμνονται στο σημείο $M(\chi_0,\psi_0)$, να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής ΑΒ είναι: $\chi_0\chi+\psi_0\psi=9$.

c) Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου Μ αν η χορδή ΑΒ περνά από το σημείο $\Delta(1,2)$.

<u>Λύση:</u>

α) $\chi^2+\psi^2=9 \Rightarrow 2\chi+2\psi\psi'=0 \Rightarrow \psi'=-\dfrac{\chi}{\psi} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi}=-\dfrac{\chi_1}{\psi_1}$

$$\psi-\psi_1=\lambda_{\varepsilon\varphi}(\chi-\chi_1) \Rightarrow \psi-\psi_1=\frac{-\chi_1}{\psi_1}(\chi-\chi_1) \Rightarrow$$

$$\psi_1\psi-\psi_1^2=-\chi_1\chi-\chi_1^2 \Rightarrow \chi_1\chi+\psi_1\psi=\chi_1^2+\psi_1^2 \Rightarrow \boxed{\chi_1\chi+\psi_1\psi=9}$$

β) $A(\chi_1,\psi_1) \Rightarrow \boxed{\chi_1\chi+\psi_1\psi=9}$ εφαπτομένη στο Α

$B(\chi_2,\psi_2) \Rightarrow \boxed{\chi_2\chi+\psi_2\psi=9}$ εφαπτομένη στο Β

Οι εφαπτόμενες τέμνονται στο σημείο $M(\chi_0,\psi_0) \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix}\chi_1\chi_0+\psi_1\psi_0=9\\ \chi_2\chi_0+\psi_2\psi_0=9\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ τα σημεία Α και Β επαληθεύουν την εξίσωση $\chi_0\chi+\psi_0\psi=9$

Άρα η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $\boxed{\chi_0\chi+\psi_0\psi=9}$.

γ) Η χορδή ΑΒ περνά από το σημείο $\Delta(1,2) \Rightarrow$ $\chi_0 1+\psi_0 2=9 \Rightarrow \chi_0+2\psi_0=9$

$\Rightarrow M(\chi_0,\psi_0)$ βρίσκεται στην ευθεία $\chi+2\psi=9$

Δηλαδή, η $\boxed{\chi+2\psi=9}$ είναι η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου.

Άσκηση 10 β)
$2^{ος}$ τρόπος λύσης

Εξίσωση εφαπτομένης στο $A(\chi_1, \psi_1)$ είναι $\chi_1\chi + \psi_1\psi = 9$
Εξίσωση εφαπτομένης στο $B(\chi_2, \psi_2)$ είναι $\chi_2\chi + \psi_2\psi = 9$

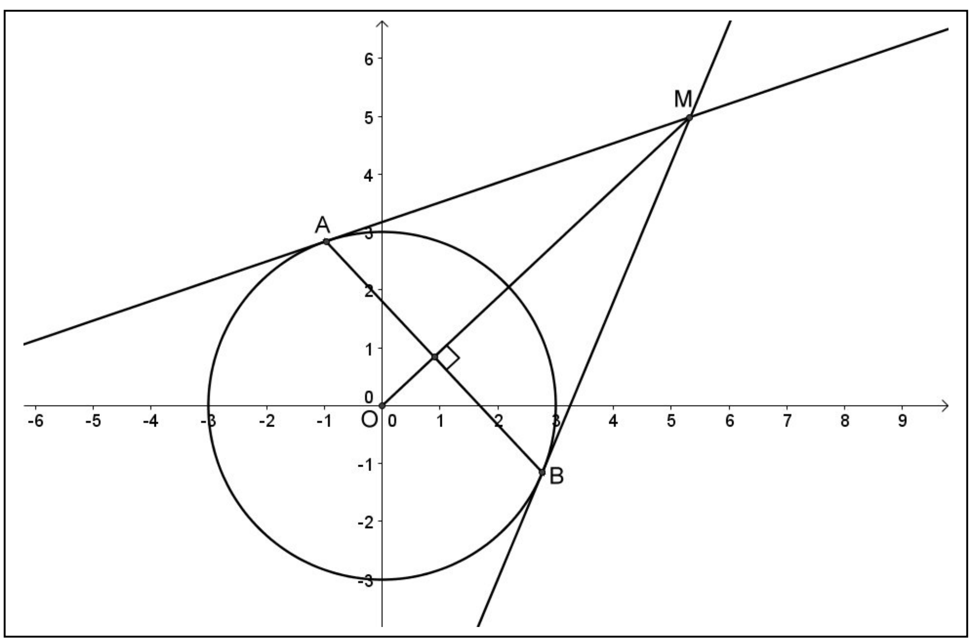
$M(\chi_0, \psi_0)$ επαληθεύει τις εφαπτόμενες στα σημεία Α και Β

$$\left.\begin{aligned} \chi_0\chi_1 + \psi_0\psi_1 = 9 \\ \chi_0\chi_2 + \psi_0\psi_2 = 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \chi_0\chi_1 + \psi_0\psi_1 = \chi_0\chi_2 + \psi_0\psi_2 \Rightarrow \chi_0\chi_1 - \chi_0\chi_2 = \psi_0\psi_2 - \psi_0\psi_1$$

$$\chi_0(\chi_1 - \chi_2) = \psi_0(\psi_2 - \psi_1) \Rightarrow \frac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1} = -\frac{\chi_0}{\psi_0}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1} = -\frac{\chi_0}{\psi_0}$$

Ή $\quad OM \perp AB \Rightarrow \lambda_{AB} = -\frac{1}{\lambda_{OM}} = -\frac{\chi_0}{\psi_0}$



Εξίσωση της ΑΒ: $\psi - \psi_1 = -\frac{\chi_0}{\psi_0}(\chi - \chi_1) \Rightarrow \psi_0\psi - \psi_0\psi_1 = -\chi_0\chi + \chi_0\chi_1 \Rightarrow$

$\chi_0\chi + \psi_0\psi = \chi_0\chi_1 + \psi_0\psi_1 \Rightarrow \chi_0\chi + \psi_0\psi = 9$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Δίνεται η καμπύλη (Κ) με παραμετρικές εξισώσεις: $\chi = \dfrac{3t}{t^3+1}$ και $\psi = \dfrac{3t^2}{t^3+1}$, $t \in R - \{-1\}$.

   a) Αν $f(t)$ είναι η απόσταση τυχαίου σημείου της καμπύλης (Κ) από την ευθεία $(\varepsilon): \chi + \psi + 1 = 0$, να δείξετε ότι: $f(t) = \dfrac{(t+1)^2}{\sqrt{2}(t^2 - t + 1)}$, $t \in R - \{-1\}$.

   b) Δίνεται η συνάρτηση: $\psi = \dfrac{(\chi+1)^2}{\chi^2 - \chi + 1}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτές της, να κάνετε την γραφική της παράσταση.

Λύση:
α)

$$f(t) = \frac{|\chi + \psi + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\left|\frac{3t}{t^3+1} + \frac{3t^2}{t^3+1} + 1\right|}{\sqrt{2}} = \frac{|t^3 + 3t^2 + 3t + 1|}{\sqrt{2}|t^3+1|} =$$

$$= \frac{(t+1)^2|t+1|}{\sqrt{2}|t+1||t^2 - t + 1|} = \frac{(t+1)^2}{\sqrt{2}|t^2 - t + 1|}$$

επειδή $t^2 - t + 1 > 0$, $(\Delta < 0)$, θα έχουμε $f(t) = \dfrac{(t+1)^2}{\sqrt{2}(t^2 - t + 1)}$.

β) Πεδίο ορισμού: $Π.Ο. = R$ $\quad (\chi^2 - \chi + 1 > 0$ διότι $\Delta < 0)$

Σημεία τομής με άξονες συντεταγμένων:
Για $\chi = 0 \Rightarrow \psi = 1$,άρα το σημείο $(0,1)$ σημείο τομής με τον άξονα των ψ.

Για $\psi = 0 \Rightarrow (\chi+1)^2 = 0 \Rightarrow \chi = -1''$, άρα το σημείο $(-1,0)$ σημείο τομής με τον άξονα των χ.

<u>Μονοτονία-Ακρότατα</u>:

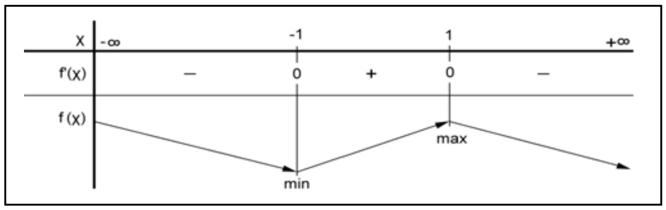
$$f'(\chi)=\frac{2(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)-(\chi+1)^2(2\chi-1)}{(\chi^2-\chi+1)^2}=$$

$$=\frac{(\chi+1)\left[2(\chi^2-\chi+1)-(\chi+1)(2\chi-1)\right]}{(\chi^2-\chi+1)^2}=$$

$$=\frac{(\chi+1)(-3\chi+3)}{(\chi^2-\chi+1)^2}=\frac{-3(\chi+1)(\chi-1)}{(\chi^2-\chi+1)^2}$$

$$f'(\chi)=0\Rightarrow(\chi+1)(\chi-1)=0\Rightarrow \chi=-1 \text{ ή } \chi=1$$

$$(\chi^2-\chi+1)^2>0$$



Για $\chi=-1\Rightarrow f(-1)=0$, $(-1,0)$ min.
Για $\chi=1\Rightarrow f(1)=4$, $(1,4)$ max.

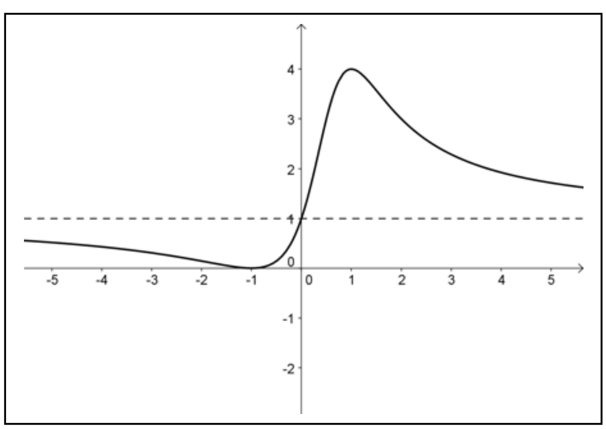
Διαστήματα Μονοτονίας:
η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$
η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$

<u>Όρια στα άκρα-ασύμπτωτες</u>:

$$\lim_{\chi\to\pm\infty}\frac{(\chi+1)^2}{\chi^2-\chi+1}=\lim_{\chi\to\pm\infty}\frac{2(\chi+1)}{2\chi-1}=\lim_{\chi\to\pm\infty}\frac{2}{2}=1$$

άρα $\psi=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

<u>Γραφική παράσταση</u>:

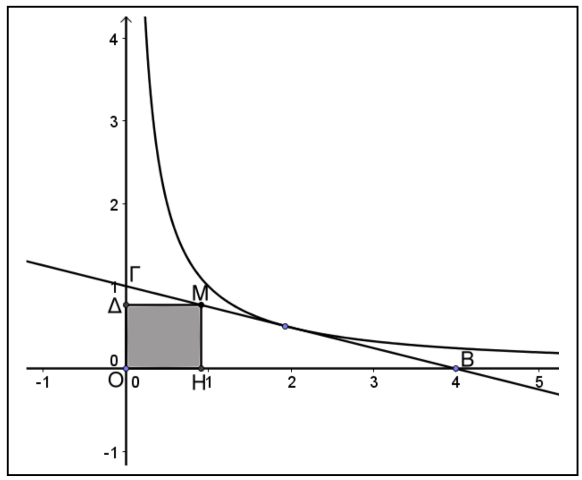


2. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $\chi\psi = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της υπερβολής που άγεται από το σημείο $B(4,\ 0)$.

   Η εφαπτομένη (ε) τέμνει το θετικό ημιάξονα των ψ στο σημείο Γ. Από τυχαίο σημείο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ φέρουμε τις κάθετες στους άξονες των συντεταγμένων και σχηματίζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΗΜΔ, όπου Ο η αρχή των αξόνων και ΟΗ, ΟΔ βρίσκονται πάνω στους άξονες.

   Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να είναι μέγιστο.

   Λύση:



$$\left.\begin{aligned} \chi\psi &= 1 \\ \psi &= \lambda\chi + \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \chi \cdot (\lambda\chi + \beta) = 1$$

$$\lambda\chi^2 + \beta\chi - 1 = 0$$

Εφάπτονται $\Delta = 0 \Rightarrow \beta^2 - 4\lambda(-1) = 0$

$$\Rightarrow \beta^2 + 4\lambda = 0$$

$$B(4,\ 0) \in \{\psi = \lambda\chi + \beta\}$$

$$\Rightarrow 0 = 4\lambda + \beta \Rightarrow \beta = -4\lambda$$

$$\Rightarrow 16\lambda^2 + 4\lambda = 0 \Rightarrow 4\lambda(4\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -\frac{1}{4}$$

$\lambda = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \psi = 0$ απορρίπτεται.

$\lambda = -\frac{1}{4} \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow \psi = -\frac{1}{4}\chi + 1$ εξίσωση εφαπτομένης.

Αν $M(\chi, \psi)$

$$E = \chi\psi \Rightarrow E = \chi\left(-\frac{1}{4}\chi + 1\right) \Rightarrow E = -\frac{1}{4}\chi^2 + \chi$$

$$\frac{dE}{d\chi} = -\frac{1}{2}\chi + 1$$

$$\frac{dE}{d\chi} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\chi + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \chi = 2 \Rightarrow \psi = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$$

χ		2	
$\frac{dE}{d\chi}$	+		−
E	↗	max	↘

3. Δίνεται συνάρτηση $f:R\to(0,+\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν: $f'(2)=0$, $f(0)=1$ και $\frac{1}{2}\int_0^2 \chi\cdot f''(\chi)d\chi+\frac{3}{2}\int_0^2 f'(\chi)d\chi=3$.

a) Να δείξετε ότι: $f(2)=4$.

b) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u=f(\chi)$, όπου f η πιο πάνω συνάρτηση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^2 \frac{f'(\chi)}{f^2(\chi)+5f(\chi)+6}d\chi$.

Λύση:

α) $\frac{1}{2}\int_0^2 \chi f''(\chi)dx+\frac{3}{2}\int_0^2 f'(\chi)dx=3 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^2 \chi d\left(f'(\chi)\right)+\frac{3}{2}\int_0^2 f'(\chi)dx=3\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\left(\chi f'(\chi)\right)_0^2-\int_0^2 f'(\chi)dx\right]+\frac{3}{2}\int_0^2 f'(\chi)dx=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0-\frac{1}{2}\int_0^2 f'(\chi)dx+\frac{3}{2}\int_0^2 f'(\chi)dx=3\Rightarrow \int_0^2 f'(\chi)dx=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[f(\chi)\right]_0^2=3\Rightarrow f(2)-f(0)=3\Rightarrow f(2)-1=3\Rightarrow f(2)=4$$

β) Έχουμε $u=f(\chi)\Rightarrow du=f'(\chi)d\chi$ και η αλλαγή ορίων είναι:
$u=f(0)=1$ και $u=f(2)=4$

Το ολοκλήρωμα γίνεται: $I=\int_0^2 \frac{f'(\chi)}{f^2(\chi)+5f(\chi)+6}d\chi=\int_1^4 \frac{du}{u^2+5u+6}$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{u^2+5u+6}=\frac{1}{(u+3)(u+2)}\equiv\frac{A}{u+3}+\frac{B}{u+2}\Rightarrow$$

$$1\equiv A(u+2)+B(u+3)\Rightarrow$$

$A=-1$ και $B=1$.

$$I=\int_1^4\frac{-1}{u+3}du+\int_1^4\frac{1}{u+2}du=-\left[\ln|u+3|\right]_1^4+\left[\ln|u+2|\right]_1^4=\ln\frac{4}{7}+\ln 2=\ln\frac{8}{7}.$$

4. Ένα δοχείο περιέχει 5 μαύρες και 3 λευκές μπάλες. Παίρνω τυχαία μια μπάλα από το δοχείο.

Αν η μπάλα είναι μαύρη, την επανατοποθετώ στο δοχείο και επίσης τοποθετώ ακόμη 2 λευκές μπάλες στο δοχείο.

Αν η μπάλα είναι λευκή, την επανατοποθετώ στο δοχείο και επίσης τοποθετώ ακόμη μια μαύρη και μια λευκή μπάλα στο δοχείο.

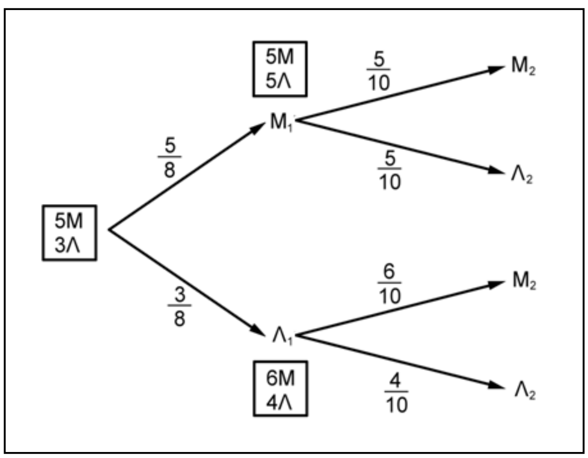
Στη συνέχεια παίρνω τυχαία μια δεύτερη μπάλα από το δοχείο.

a) Να βρείτε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα που πήρα να είναι λευκή.

b) Αν η δεύτερη μπάλα που πήρα είναι λευκή, ποια η πιθανότητα η πρώτη μπάλα που πήρα να είναι μαύρη;

c) Αν τη δεύτερη φορά, αντί να πάρω μια μπάλα παίρνω τυχαία δύο μπάλες ταυτόχρονα, ποια η πιθανότητα οι μπάλες να έχουν το ίδιο χρώμα;

Λύση:



α) $P(\Lambda_2) = P(M_1 \cap \Lambda_2) + P(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} = \frac{37}{80}$

β) $P(M_1 / \Lambda_2) = \frac{P(M_1 \cap \Lambda_2)}{P(\Lambda_2)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{10}}{\frac{37}{80}} = \frac{25}{37}$

γ) $P(\Gamma) = \frac{5}{8} \cdot \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\binom{6}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{20}{45} + \frac{3}{8} \cdot \frac{21}{45} = \frac{163}{360}$

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(\chi)=\chi\ln\chi-\chi+1,\ \chi\in(0,+\infty)$.

a) Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)$.

b) Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\chi^{\chi}\geq e^{\chi-1}$ για κάθε $\chi>0$.

c) Να αποδείξετε ότι: $e\int_{\alpha}^{\beta}\chi^{\chi}\,d\chi\geq e^{\beta}-e^{\alpha}$ με $0<\alpha<\beta$.

<u>Λύση:</u>

α) Έχουμε $f'(\chi)=\ln\chi+1-1=\ln\chi$, $\chi>0$. Άρα

$f'(\chi)=0\Leftrightarrow\ln\chi=0\Leftrightarrow\chi=1$

χ	0		1		$+\infty$
$f'(\chi)$	||	$-$	0	$+$	
$f(\chi)$		↘	min	↗	

Δηλαδή

η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\chi=1$ το $f(1)=0$, άρα $(1,0)$ min.

Βρίσκουμε πρώτα το όριο $\lim\limits_{\chi\to 0^+}(\chi\ln\chi)$

$$\lim_{\chi\to 0^+}(\chi\ln\chi)\overset{(0\cdot(-\infty))}{=}\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\ln\chi}{\frac{1}{\chi}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\frac{1}{\chi}}{-\frac{1}{\chi^2}}=\lim_{\chi\to 0^+}(-\chi)=0.$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\lim_{\chi\to 0^+}f(\chi)=\lim_{\chi\to 0^+}(\chi\ln\chi-\chi+1)=\lim_{\chi\to 0^+}(\chi\ln\chi)-\lim_{\chi\to 0^+}\chi+\lim_{\chi\to 0^+}1=0-0+1=1$$

β) Επειδή $(1,0)$ ολικό ελάχιστο: $f(\chi)\geq f(1)$ για κάθε $\chi>0$.

Άρα $\chi\ln\chi-\chi+1\geq 0\Leftrightarrow\chi\ln\chi\geq\chi-1\Leftrightarrow\ln\chi^{\chi}\geq\chi-1\Leftrightarrow\boxed{\chi^{\chi}\geq e^{x-1}}$ για κάθε $\chi>0$.

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(\chi)=\chi^{\chi}-e^{\chi-1}$, $\chi>0$.

Η g είναι είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και $g(\chi)\geq 0$ από το (β).

Άρα: $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\chi^{\chi}-e^{\chi-1}\right)dx\geq 0\Leftrightarrow\int\limits_{\alpha}^{\beta}\chi^{\chi}\,dx\geq\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{\chi-1}dx=\left[e^{\chi-1}\right]_{\alpha}^{\beta}=e^{\beta-1}-e^{\alpha-1}=\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{e}$.

Τελικά: $e\int_{\alpha}^{\beta}\chi^{\chi}\,d\chi\geq e^{\beta}-e^{\alpha}$.