ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

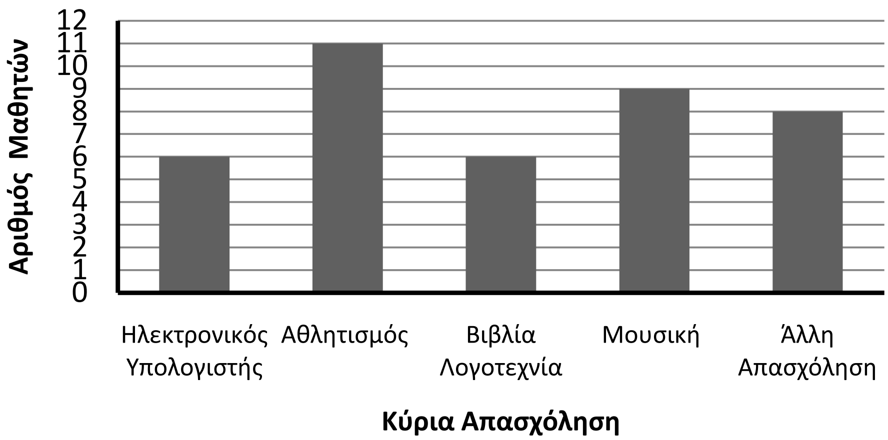
Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κοινού Κορμού

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 30 Μαΐου 2011
08:30 π.μ. – 11:30 π.μ.

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. Ένα δείγμα μαθητών της Α΄ Λυκείου ρωτήθηκε ποια είναι η κύρια απασχόλησή τους στον ελεύθερό τους χρόνο. Οι απαντήσεις όλων των μαθητών του δείγματος φαίνονται στο πιο κάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων.



Να βρείτε:
(α) Πόσοι ήταν οι μαθητές του δείγματος;
(β) Με τι απασχολούνται στον ελεύθερό τους χρόνο τα περισσότερα παιδιά του δείγματος;

<u>ΛΥΣΗ</u>

α. $6+11+6+9+8=40$, 40 μαθητές

β. Οι περισσότεροι μαθητές έχουν σαν κύρια απασχόληση τον αθλητισμό

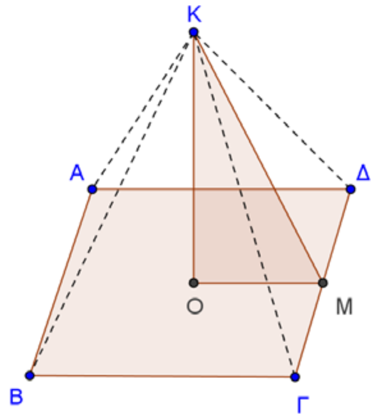
2. Ο Θανάσης αγόρασε ένα φορητό ηλεκτρονικό υπολογιστή αξίας $€600$ και πλήρωσε επιπλέον 15% Φ.Π.Α. πάνω στην αξία του. Να βρείτε πόσα πλήρωσε.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$600 \text{ X } 15\% = €90$ Φ.Π.Α

$600+90=€690$ Τελική τιμή

3.	Κώνος έχει ακτίνα βάσης $6cm$ και ύψος $8cm$. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου. **<u>ΛΥΣΗ</u>** $\mathrm{R} = 6\mathrm{cm}, \quad \upsilon = 8\mathrm{cm}$ $\mathrm{V} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \upsilon}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3}$ $V = 96\pi\ cm^3$	
4.	Να βρείτε πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν με τα ψηφία $2, 4, 5, 6, 8,$ και 9 αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου. **<u>ΛΥΣΗ</u>** $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline Χ & Ε & Δ & Μ \\ \hline 6 & 5 & 4 & 3 \\ \hline \end{array}$ $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ διαφορετικούς τρόπους	
5.	Η Ειρήνη αγόρασε ένα αυτοκίνητο και πλήρωσε €12000. Μετά από ένα χρόνο το πώλησε 16% πιο κάτω από την τιμή που το αγόρασε. Τα λεφτά που πήρε από την πώληση του αυτοκινήτου τα κατάθεσε στην τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 4%. Πόσο τόκο πήρε μετά από 15 μήνες; **<u>ΛΥΣΗ</u>** $12000 \cdot 16\% = €1920$ $12000 - 1920 = €10080$ Τιμή πώλησης αυτοκινήτου €10080 $T = \frac{K \cdot E \cdot X}{12 \cdot 100}$ $T = \frac{10080 \cdot 4 \cdot 15}{12 \cdot 100}$ $T = €504$ Θα εισπράξει τόκο €504	

6.	Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $260cm^2$ και παράπλευρο ύψος $13cm$. Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας **<u>ΛΥΣΗ</u>** $E_\pi = 260cm^2$ $\frac{\Pi_\beta \cdot h}{2} = 260cm^2$ $\frac{\Pi_\beta \cdot 13}{2} = 260cm^2$ $\boldsymbol{\Pi_\beta = 40cm}$ $4a = 40cm$ $a = 10cm$  $E_\beta = \alpha^2 = 10^2 = 100cm^2$ $OM = 5cm$ $\Pi.\Theta.\ KM^2 = OM^2 + KO^2$ $13^2 = 5^2 + \upsilon^2$ $\upsilon^2 = 144$ $\upsilon = 12cm$ $V = \frac{E_\beta \cdot \upsilon}{3} = \frac{100 \cdot 12}{3} = 400cm^3$	
7.	Τα ενδεχόμενα Α και Β είναι του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{1}{4}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες: (α) $P(B')$ (β) $P(A \cup B)$ (γ) $P(B - A)$ **<u>ΛΥΣΗ</u>** $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ $P(B - A) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$	

<table>
<tr><td>8.</td><td>Δίνονται οι αριθμοί12, $x,\ y,\ \omega,\ z,\ 17$ με επικρατούσα τιμή 2 και μέση τιμή 6. Αν $x,\ y,\ \omega,\ z$ είναι ακέραιοι θετικοί αριθμοί και το ω είναι διπλάσιο του z, να βρείτε τις τιμές των $x,\ y,\ \omega$ και z.
<u>ΛΥΣΗ</u>
το ω είναι διπλάσιο του z , $\omega = 2z$
επικρατούσα τιμή 2 άρα τουλάχιστον δύο από τους αγνώστους πρέπει να είναι ίσοι με 2.
Το ω και z δεν μπορούν να είναι και οι δύο ίσοι με 2 αφού $\omega = 2z$
Άρα ένας τουλάχιστον από τους x ή y θα είναι ίσος με 2
$x = 2$
$$\text{μέση τιμή } 6 \quad ά\rho\alpha \ \frac{12+2+y+2z+z+17}{6} = 6$$
$$y + z + 2z = 5$$
Αν y=2 τότε $3z = 3 \Rightarrow z = 1$ και $\omega = 2$
$$\chi = y = \omega = 2 \text{ και } z = 1$$
Αν z=2 τότε y=-1 απορρίπτεται
Αν ω=2 τότε $z = 1, y = 2$ δηλαδή $\chi = y = \omega = 2$ και $z = 1$</td><td></td></tr>
<tr><td>9.</td><td>Σε ένα σχολικό πρωτάθλημα καλαθόσφαιρας συμμετείχαν ν ομάδες. Κάθε ομάδα αγωνίστηκε με κάθε άλλη ομάδα μια μόνο φορά. Αν συνολικά διεξήχθηκαν 36 αγώνες, να βρείτε τον αριθμό ν των ομάδων που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα
<u>ΛΥΣΗ</u>
$\binom{\nu}{2} = 36$
$\frac{\nu!}{2!\cdot(\nu-2)!} = 36$
$\frac{\nu\cdot(\nu-1)\cdot(\nu-2)!}{2!\cdot(\nu-2)!} = 36$
$\nu\cdot(\nu-1) = 72$
$\nu^2 - \nu - 72 = 0$
$\nu = -8\ \alpha\pi o\rho\rho.$ $\nu = 9$ Υπάρχουν συνολικά 9 ομάδες</td><td></td></tr>
<tr><td>10.</td><td>Ένας ποδηλάτης ξεκίνησε στις 8 το πρωί από το σημείο Α με ταχύτητα $24\ km/h$ και έφτασε σε ένα σημείο Β, όπου χάλασε το ποδήλατό του. Μετά από 30 λεπτά ξεκίνησε πεζός για να επιστρέψει στο σημείο Α ακολουθώντας την ίδια διαδρομή με ταχύτητα $4\ km/h$. Επέστρεψε στο σημείο Α στις 12 το μεσημέρι της ίδιας ημέρας. Να βρείτε το μήκος της διαδρομής από το σημείο Α στο σημείο Β.
<u>ΛΥΣΗ</u>
$$t_A + t_B + 30\ \lambda\varepsilon\pi\tau ά = 4ώ\rho\varepsilon\varsigma \Rightarrow t_B = 3{,}5 - t_A$$
$$S_A = S_B$$
$$U_A \cdot t_A = U_B \cdot t_B$$
$$24 \cdot t_A = 4 \cdot (3{,}5 - t_A)$$
$t_A = \frac{1}{2}h$
$S_A = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12km$ Απόσταση 12 km</td><td></td></tr>
</table>

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Η Έλενα κατέγραψε τον αριθμό των επιβατών των 100 πρώτων αυτοκινήτων που πέρασαν μπροστά από το σπίτι της ένα απόγευμα. Τα αποτελέσματα της καταγραφής φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

Αρ. Επιβατών (x_i)	1	2	3	4	5
Αρ. Αυτοκινήτων (f_i)	44	30	15	4	7

(α) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή (x_ε) και τη διάμεσο (x_δ).

(β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $(\bar{x})$ και την τυπική απόκλιση (σ) του αριθμού των επιβατών των αυτοκινήτων κατά προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων.

ΛΥΣΗ

x_i	f_i	$f_i x_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i(x_i-\bar{x})^2$
1	44	44	1	44
2	30	60	0	0
3	15	45	1	15
4	4	16	4	16
5	7	35	9	63
	$\sum f_i = 100$	$\sum f_i x_i = 200$		$\sum f_i(x_i-\bar{x})^2 = 138$

α) $x_\varepsilon = 1$ επιβάτης

$$x_\delta = \frac{x_{50}+x_{51}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \text{ επιβάτες}$$

β) $$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{200}{100} = 2 \text{ επιβάτες}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{138}{100}} = 1{,}17 \text{ επιβάτες}$$

2.	Δίνεται η λέξη **ΑΛΛΗΛΕΓΓΥΗ**. (α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της. (β) Πόσοι αναγραμματισμοί αρχίζουν με Η; (γ) Πόσοι αναγραμματισμοί έχουν όλα τα φωνήεντα μαζί; (δ) Πόσοι αναγραμματισμοί αρχίζουν με σύμφωνο; (ε) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου να επιλέξουμε ένα αναγραμματισμό στην τύχη που να αρχίζει με Η; **<u>ΛΥΣΗ</u>** Φωνήεντα: **Α, Η, Ε, Υ, Η** Σύμφωνα: **Λ, Λ, Λ, Γ, Γ** (α) $M_{10}^{\varepsilon} = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151200$ (β) $M_{9}^{\varepsilon} = \frac{9!}{3!\cdot 2!} = 30240$ (γ) $M_{5}^{\varepsilon} \cdot M_{6}^{\varepsilon} = \frac{5!}{2!} \cdot \frac{6!}{3!\cdot 2!} = 3600$ (δ) Με Λ $\frac{9!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 45360$ Με Γ $\frac{9!}{3!\cdot 2!} = 30240$ $45360 + 30240 = 75600$ (ε) $P(H) = \frac{N(H)}{N(\Omega)} = \frac{30240}{151200} = \frac{1}{5}$	

3. Μια βιοτεχνία που παράγει σοκολατάκια, αγοράζει την πρώτη ύλη σε πλάκες σοκολάτας που έχουν σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις $30cm, 10cm,$ και $5cm$. Για μια συγκεκριμένη παραγγελία θα χρησιμοποιηθούν 50 πλάκες σοκολάτας και θα προστεθούν και άλλα υλικά σε ποσοστό 10% του όγκου της σοκολάτας που θα χρησιμοποιηθεί. Κατά την επεξεργασία του μείγματος υπάρχει απώλεια όγκου 5%. Τα σοκολατάκια που θα παραχθούν θα έχουν όγκο $5cm^3$ το καθένα και θα συσκευαστούν σε κουτιά των 25.
(α) Να βρείτε πόσα σοκολατάκια θα παραχθούν και πόσα κουτιά θα χρειαστούν.
(β) Αν το συνολικό κόστος παραγωγής είναι €7524 και το κάθε κουτί πωλείται προς €15, να βρείτε το ποσοστό του κέρδους της βιοτεχνίας (πάνω στο κόστος).

<u>ΛΥΣΗ</u>

Κάθε πλάκα σοκολάτας: $30 \cdot 10 \cdot 5 = 1500\ cm^3$

Για τις 50 πλάκες σοκολάτας: $50 \cdot 1500 = 75000\ cm^3$

Προσθήκη υλικών: $\frac{10}{100} \cdot 75000 = 7500\ cm^3$

Μείγμα: $75000 + 7500 = 82500\ cm^3$

Για τις απώλειες: $\frac{5}{100} \cdot 82500 = 4125\ cm^3$

Υπόλοιπο: $82500 - 4125 = 78375\ cm^3$

(α) Για τα σοκολατάκια: 78375:5=15675 σοκολατάκια

Θα συσκευαστούν σε 15675:25=627 κουτιά

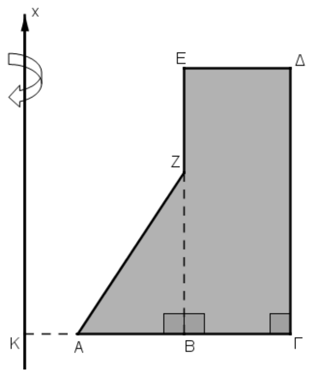
(β) Από τις πωλήσεις εισπράττει: 627·15=9405 ευρώ

Κέρδος 9405 – 7524 = 1881

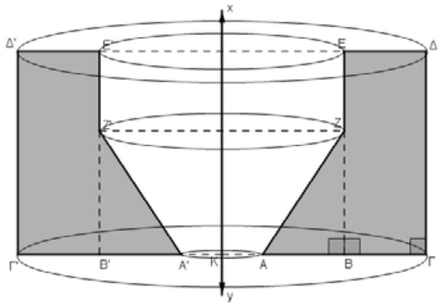
$$7524 \cdot \chi\% = 1881 \Rightarrow \chi = \frac{1881 \cdot 100}{7524} = 25\%$$

4.	Σε μια ομάδα εργασίας για το περιβάλλον συμμετέχουν 8 Ευρωπαίοι και 3 Αμερικανοί επιστήμονες. Από αυτούς θα επιλεγεί τυχαία μια τετραμελής επιτροπή. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων: **Α**: Η επιτροπή να αποτελείται από δύο Ευρωπαίους και δυο Αμερικανούς. **Β**: Η επιτροπή να αποτελείται από τρεις τουλάχιστον Ευρωπαίους. **Γ**: Η επιτροπή να αποτελείται από επιστήμονες της ίδιας ηπείρου. **Δ**: Στην επιτροπή να αντιπροσωπεύονται και οι δυο ήπειροι. **<u>ΛΥΣΗ</u>** Πλήθος όλων των επιτροπών: $\binom{11}{4} = 330$ $P(\boldsymbol{A}) = \frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{3}{2}}{330} = \frac{84}{330} = \frac{14}{55}$ $P(\boldsymbol{B}) = \frac{\binom{8}{3}\cdot\binom{3}{1}+\binom{8}{4}}{330} = \frac{238}{330} = \frac{119}{165}$ $P(\boldsymbol{\Gamma}) = \frac{\binom{8}{4}}{330} = \frac{70}{330} = \frac{7}{33}$ $P(\boldsymbol{\Delta}) = 1 - \frac{7}{33} = \frac{26}{33}$	

5. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΒΓΔΕ$, ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΖ$ και $ΖΒ \perp ΑΓ$, με $ΑΒ = 3cm,\ \ ΒΓ = 3cm,$ και $ΒΖ = 4cm$. Το σκιασμένο πεντάπλευρο $ΑΓΔΕΖ$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy, που είναι παράλληλος προς τη $ΔΓ$ και απέχει απόσταση $ΚΑ = 1cm$ από την κορυφή $Α$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



<u>ΛΥΣΗ</u>



ΠΘ
$\lambda^2 = 3^2 + 4^2$
$\lambda = \sqrt{25} = 5cm$

Στοιχεία Εξωτερικού Κυλίνδρου (Κύλινδρος 1):
$R = 7\ cm \quad \upsilon = (ΓΔ)$

Στοιχεία Εσωτερικού Κυλίνδρου (Κύλινδρος 2):
$R = 4\ cm$
$\upsilon = ((ΓΔ) - 4)cm$

Στοιχεία Κόλουρου Κώνου:
$R = 4\ cm$
$\rho = 1\ cm$
$\upsilon = 4\ cm$
$\lambda = 5\ cm$

$E_{ο\lambda} = E_{\kappa\ \kappa\upsilon\lambda 1} + E_{\kappa\ \kappa\upsilon\lambda 2} + E_{\kappa\ \kappa o\lambda.\kappa.} + 2E_{\beta\ \kappa\upsilon\lambda 1} - E_{\beta R\ \kappa o\lambda.\kappa} - E_{\beta\rho\ \kappa o\lambda.\kappa}$

$E_{ο\lambda} = 2\pi \cdot 7 \cdot (ΓΔ) + 2\pi \cdot 4 \cdot ((ΓΔ) - 4) + \pi(4+1)5 + 2\pi \cdot 7^2 - \pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 1^2$

$$E_{ο\lambda} = 14\pi(ΓΔ) + 8\pi(ΓΔ) - 32\pi + 25\pi + 98\pi - 16\pi - \pi$$

$$E_{ο\lambda} = (22\pi(ΓΔ) + 74\pi)cm^2$$

$V = V_{\kappa\upsilon\lambda 1} - V_{\kappa\upsilon\lambda 2} - V_{\kappa o\lambda.\kappa}$

$V = \pi \cdot 7^2 \cdot (ΓΔ) - \pi \cdot 4^2 \cdot ((ΓΔ) - 4) - \dfrac{\pi \cdot (4^2 + 4 \cdot 1 + 1^2) \cdot 4}{3}$

$V = 49\pi(ΓΔ) - 16\pi(ΓΔ) + 64\pi - 28\pi$

$V = (33\pi(ΓΔ) + 36\pi)\ cm^3$