ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

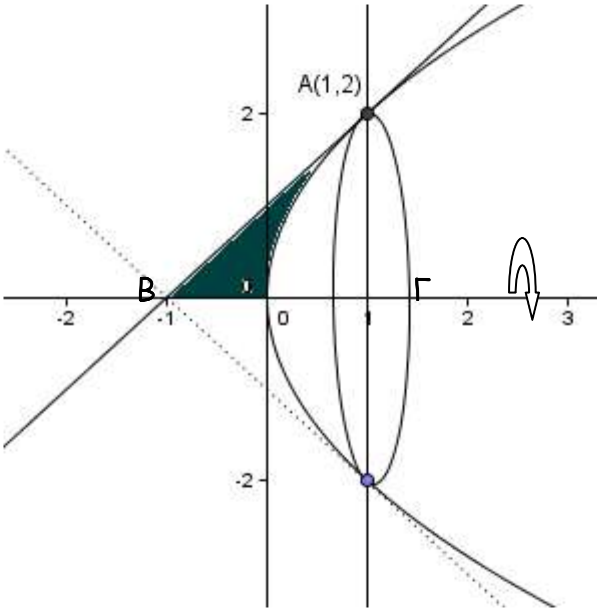
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 1 Ιουνίου 2009
07:30 π.μ. – 10:30 π.μ.

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1.	$\int\left(3x^2-2x\right)dx=\dfrac{3x^3}{3}-\dfrac{2x^2}{2}+c$ $=x^3-x^2+c$	
2.	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}$ (Α.Μ). $(L'H)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{6x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$ (Α.Μ). $(L'H)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{6}=\dfrac{1}{6}$	
3.	$A=\begin{pmatrix}1&2\\5&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&0\\-3&4\end{pmatrix}$ α) $A+B=\begin{pmatrix}1&2\\5&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\2&3\end{pmatrix}$ β) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\5&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&0\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-6&0+8\\-10+3&0-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&8\\-7&-4\end{pmatrix}$	

4.	$P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{3}{4}$, A,B ανεξάρτητα ενδεχόμενα α) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ β) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5}{6}$ γ) $P(B/A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$	
5.	$x^2+y^2-16x-12y+96=0$, A(4,3) α) K(8,6) , $R=\sqrt{8^2+6^2-96}=\sqrt{4}=2 \Rightarrow R=2$ β) $d_A=\sqrt{(8-4)^2+(6-3)^2}=\sqrt{25}=5$ $d_A>R \Rightarrow$ A εξωτερικό σημείο του κύκλου. γ) Ελάχιστη απόσταση: $d_A-R=5-2=3$	
6.	$\psi^2=4x$, A(1 , 2) $2y\,y'=4 \Rightarrow y'=\frac{2}{y}$ $\lambda_{\varepsilon\phi}=y'\|_{(1,2)}=\frac{2}{2}=1$ $y-y_1=\lambda(x-x_1)$ $y-2=1(x-1) \Rightarrow y=x+1$	



y=x+1

$y = 0 \Rightarrow x = -1$, $\mathrm{B}(-1,0)$.

Ο κώνος που παράγεται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει:

$$R = \mathrm{A\Gamma} = 2$$
$$\upsilon = \mathrm{B\Gamma} = 2$$

$$V = V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} - \pi\int_0^1 4x\,dx$$

$$= \frac{\pi R^2 \upsilon}{3} - \frac{4\pi x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi 2^2 \cdot 2}{3} - \frac{4\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}\,\kappa.\mu.$$

7.	$\mathrm{f}^3(\mathrm{x})+\mathrm{f}(\mathrm{x})=2\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}$ $3f^2(x)\cdot f'(x)+f'(x)=4e^{2x}$ $f'(x)(3f^2(x)+1)=4e^{2x}$ $f'(x)=\dfrac{4e^{2x}}{3f^2(x)+1}$ $f'(x)\neq 0$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R	
8.	$u=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad du=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \quad \Rightarrow \quad dx=2u\,du$ $\int \ln\sqrt{x}\,dx=\int 2u\ln u\,du$ $=\int (u^2)'\ln u\,du$ $=u^2\ln u-\int u^2\dfrac{1}{u}du$ $=u^2\ln u-\dfrac{u^2}{2}+c$ $=x\ln\sqrt{x}-\dfrac{x}{2}+c$ **<u>Β΄τρόπος</u>** $\int \ln\sqrt{x}\,dx=x\ln\sqrt{x}-\int x\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=$ $x\ln\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\int dx=x\ln\sqrt{x}-\dfrac{x}{2}+c$	

9.

(α) $M_{\varepsilon}^{9}=\frac{9!}{3!2!}=30240$

(β) $N(\Omega)=30240$,

$$P(K)=\frac{\frac{7!}{2!}}{30240}=\frac{2520}{30240}=\frac{1}{12}$$

•

$$P(\Lambda)=\frac{\frac{5!}{2!}\frac{5!}{3!}}{30240}=\frac{1200}{30240}=\frac{5}{126}$$

$$\begin{aligned}P(M)&=1-P(2\ \text{συνεχόμενα A})\\&=1-\frac{\frac{8!}{2!}-\frac{7!}{2!}}{30240}\\&=1-\frac{17640}{30240}=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

<u>Β΄τρόπος</u>

* Π * Ρ * Σ * Τ * Σ * Η * , με * συμβολίζουμε τις δυνατές θέσεις των Α.

$$P(M)=\frac{\binom{7}{3}\frac{6!}{2!}}{30240}=\frac{12600}{30240}=\frac{5}{12}$$

10.

(α)

$f(x)=2xe^{-x}\Rightarrow f'(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}$

$\Rightarrow f'(x)=2e^{-x}(1-x)$

$\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=1$

x	- ∞	1	+∞
y'	+	0	-
y	↗		↘

ολικό. μεγ. $\left(1\,,\ \frac{2}{e}\right)$

(β) $f(1) \geq f(x)$ για κάθε $x \in R$

$\frac{2}{e} \geq 2xe^{-x} \Rightarrow 2xe^{-x} \leq \frac{2}{e} < 1$

$\Rightarrow e^{x} > 2x$ για κάθε $\chi \in R$

<u>β' τρόπος</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{x} - 2x, \; x \in R$

$$g'(x) = e^{x} - 2$$

$g'(x) = 0 \;\Rightarrow\; e^{x} = 2 \;\Rightarrow\; x = \ln 2$

Η g είναι συνεχής και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \ln 2$ το

$g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2)$

αφού η $y = \ln x$ είναι αύξουσα στο Π.Ο της, έχουμε

$e > 2 \;\Rightarrow\; \ln e > \ln 2 \;\Rightarrow\; 1 - \ln 2 > 0$

άρα $g(x) \geq g(\ln 2) > 0 \;\Rightarrow\; e^{x} - 2x > 0 \;\Rightarrow\; e^{x} > 2x \;, \;\; \forall\; x \in R$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>

1.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 3x}$$

- $x^2 - 3x = x(x-3) \neq 0, \; x \neq 0, x \neq 3$ άρα πεδίο ορισμού: A=$R - \{0,3\}$.
- Σημεία τομής με άξονες συντεταγμένων:
  $y = 0 \Rightarrow x = -1$, άρα (-1,0) σημείο τομής με xx΄.
- Ακρότατα:

$$f'(x) = \frac{1(x^2 - 3x) - (x+1)(2x-3)}{(x^2 - 3x)^2} = \frac{x^2 - 3x - 2x^2 + 3x - 2x + 3}{(x^2 - 3x)^2} =$$

$$\frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 - 3x)^2} = \frac{-(x-1)(x+3)}{(x^2 - 3x)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -3.$$

x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	min	↗	‖	↗	max	↘	‖	↘	

Για $x=-3 \Rightarrow f(-3)=-\frac{1}{9}$, min$(-3,-\frac{1}{9})$.
Για $x=1 \Rightarrow f(1)=-1$, max(1,-1).

- Όρια στα άκρα-ασύμπτωτες :

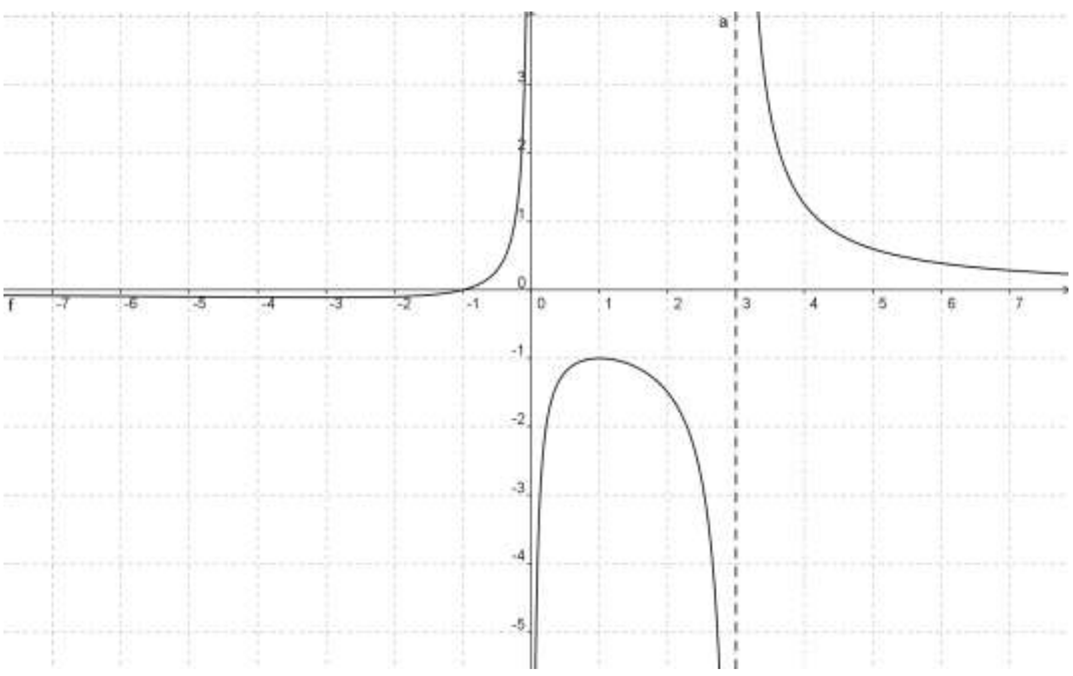
$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^2-3x}=-\infty$ και $\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x^2-3x}=+\infty$, άρα x=0, κατακόρυφη ασύμπτωτη.

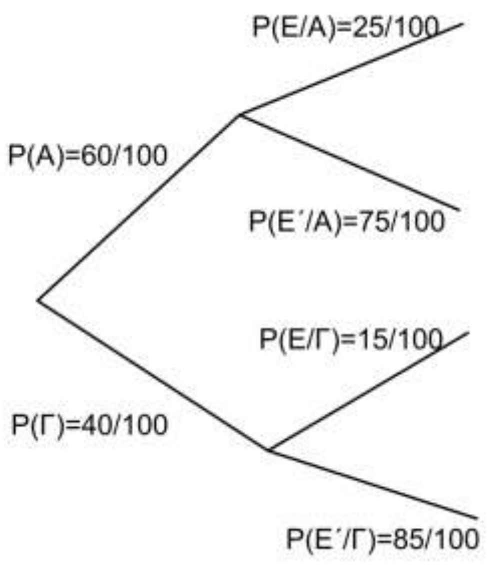
$\lim_{x\to 3^+}\frac{x+1}{x^2-3x}=+\infty$ και $\lim_{x\to 3^-}\frac{x+1}{x^2-3x}=-\infty$, άρα x=3, κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

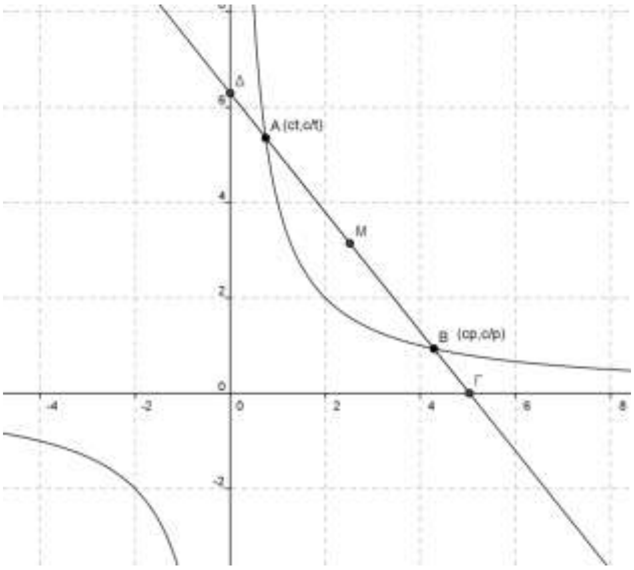
Άρα y=0 οριζόντια ασύμπτωτη.

- Γραφική παράσταση:



2.	Έστω τα ενδεχόμενα : Α:≪ το άτομο είναι άνδρας≫ Γ: ≪ το άτομο είναι γυναίκα≫ και Ε: ≪το άτομο ταξιδεύει για επαγγελματικούς λόγους≫ α) $P(E) = P(A \cap E) + P(\Gamma \cap E) = P(A)P(E/A) + P(\Gamma)P(E/\Gamma) = \frac{60}{100} \cdot \frac{25}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{15}{100} = \frac{21}{100}$ β) $P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)P(E/A)}{P(E)} = \frac{\frac{60}{100} \cdot \frac{25}{100}}{\frac{21}{100}} = \frac{5}{7}$ **<u>β' τρόπος:</u>** Με δεντροδιάγραμμα.  	

3.



α) $\lambda_{AB} = \frac{\frac{C}{\rho}-\frac{C}{t}}{c\rho - ct} = -\frac{1}{\rho t}$. Άρα η εξίσωση της ΑΒ είναι:

$$y - \frac{c}{t} = -\frac{1}{t\rho}(x - ct) \Rightarrow \rho t y - c\rho = -x + ct \Rightarrow x + \rho t y = c(\rho + t) .$$

β) Για $x = 0 \Rightarrow y = \frac{c(\rho+t)}{\rho t}$, $\Delta\left(0, \frac{c(\rho+t)}{\rho t}\right)$.

Για y= $0 \Rightarrow x = c(\rho + t)$, $\Gamma(c(\rho + t), 0)$.

γ) Αν η χορδή ΑΒ περνά από το σημείο $(2c, 2c)$ έχουμε:

$2c + \rho t 2c = c(\rho + t) \Rightarrow 2(t\rho + 1) = \rho + t$ (1)

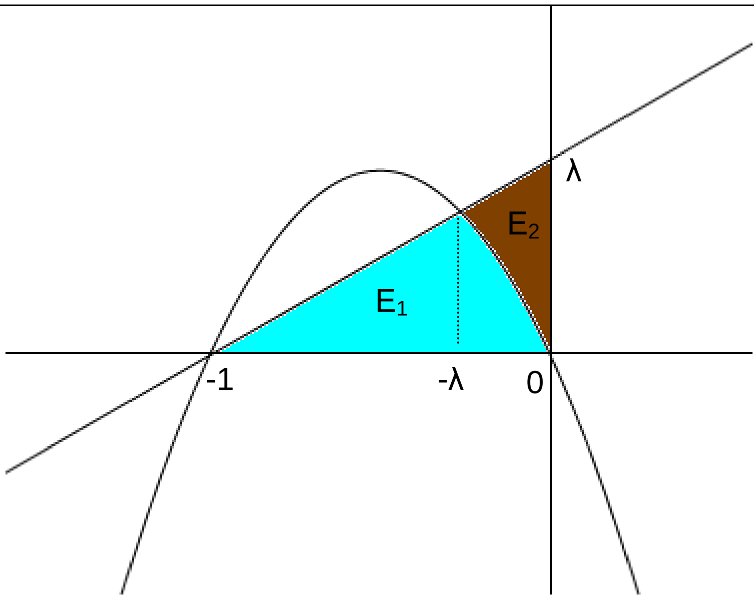
δ) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ(x,y) του ΓΔ είναι:

$x = \frac{c(\rho+t)}{2} \Rightarrow \rho + t = \frac{2x}{c}$ (2)

$y = \frac{c(\rho+t)}{2\rho t} \Rightarrow \rho t = \frac{c(\rho+t)}{2y}$ και από την (2) έχουμε: $\rho t = \frac{x}{y}$ (3).

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) έχουμε:
$\frac{2x}{c} = 2\left(1 + \frac{x}{y}\right) \Rightarrow \frac{x}{c} = 1 + \frac{x}{y} \Rightarrow yx = c(y + x)$.

4.



Σημεία τομής ευθείας και παραβολής

$$-x^2 - x = \lambda x + \lambda$$

$$x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda = 0$$

$$(x+\lambda)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \; x = -\lambda \;,\; \chi = -1$$

α) $$\mathrm{E}_2 = \int_{-\lambda}^{0}\left[\,(\lambda x + \lambda) - (-x^2 - x)\,\right]dx$$

$$= \int_{-\lambda}^{0}\left(\lambda x + \lambda + x^2 + x\right)dx$$

$$= \left[\frac{\lambda x^2}{2} + \lambda x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-\lambda}^{0}$$

$$= \left[-\frac{\lambda^3}{2} + \lambda^2 + \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^2}{2}\right]$$

$$= \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{6}$$

$$E_1 = E_{\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} - \mathrm{E}_2$$

$$= \frac{\lambda}{2} - \left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{6}\right) = \frac{3\lambda - 3\lambda^2 + \lambda^3}{6}$$

β) $$E(\lambda) = \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2 = \frac{3\lambda - 3\lambda^2 + \lambda^3}{6} - \frac{3\lambda^2 - \lambda^3}{6} = \frac{\lambda}{2} - \lambda^2 + \frac{\lambda^3}{3}$$

γ) $E(\lambda)=\frac{\lambda}{2}-\lambda^2+\frac{\lambda^3}{3}$ $\Rightarrow E'(\lambda)=\frac{1}{2}-2\lambda+\lambda^2$

$$E'(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$\lambda=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ Απορρίπτεται

λ	0		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		1	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
E'		+	0	-		0
E		↗		↘		

Για $\lambda=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή

5.

$$f(\alpha+\beta-x)=f(x)$$

α)

$$u=a+\beta-x \quad \Rightarrow \quad du=-dx$$

$$x=a \quad \Rightarrow \quad u=\beta$$
$$x=\beta \quad \Rightarrow \quad u=\alpha$$

$$\int_\alpha^\beta x\, f(x)\,dx=-\int_\beta^a (a+\beta-u)\, f(a+\beta-u)\,du$$
$$=\int_a^\beta (a+\beta)\, f(u)\,du-\int_a^\beta u\, f(u)\,du$$
$$=\int_a^\beta (a+\beta)\, f(x)\,dx-\int_a^\beta x\, f(x)\,dx$$

$$2\int_a^\beta x\, f(x)\,dx=(\alpha+\beta)\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \quad \Rightarrow \int_a^\beta x\, f(x)\,dx=\frac{a+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

β) Έστω $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x$

$$f(0+\pi-x)=\sigma\upsilon\nu^2(\pi-x)=\sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\Rightarrow \; f(0+\pi-x)=f(x)$$

$$\int_0^\pi x\,\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu^2 x\;dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\,dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[x+\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_0^\pi$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\pi+\frac{\eta\mu 2\pi}{2}-\frac{\eta\mu 0}{2}\right]=\frac{\pi^2}{4}$$

<u>**Β΄τρόπος**</u>

$$\int_0^\pi x\;\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\;dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^\pi x\,\sigma\upsilon\nu 2x\;dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi x\,d\left(\frac{\eta\mu 2x}{2}\right)$$

$$\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{4}\left[\;[x\eta\mu 2x]_0^\pi-\int_0^\pi 2\sigma\upsilon\nu 2x\,dx\;\right]$$

$$\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{4}$$